<u>Математическое дополнение.</u>

<u>Аппарат угловых моментов.</u>

Оператор углового момента определяется коммутационными соотношениями для его компонент $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z; \qquad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x\ ; \qquad [\hat{J}_z, \hat{J}_y] = -i\hbar \hat{J}_x .$$

Оператор орбитального момента :

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar \vec{r} \times \nabla$$

Пусть $\hbar = 1$.

Операторы орбитального момента и спина подчиняются тем же коммутационным соотношениям.

Так как $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$, то $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$ имеют общий набор собственных функций ϕ_{JM}.

$$\hat{J}^2 \phi_{JM} = J(J+1)\phi_{JM} ,$$

$$\hat{J}^2 \phi_{JM} = M\phi_{JM}$$

Для спинового момента $S = 1/2$

$$\hat{S}_x = \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tfrac{1}{2}$$

$$\hat{S}_y = \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_y = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_z = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2 \chi_{\frac{1}{2}\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\chi_{\frac{1}{2}\mu}$$

$$\hat{S}_z \chi_{\frac{1}{2}\mu} = \mu \chi_{\frac{1}{2}\mu}$$

Простейшее каноническое представление:

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_{s\mu_s}$ - спинор.

<u>Сложение двух угловых моментов.</u>

Пусть у нас имеется система, гамильтониан которой $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, подсистемы не взаимодействуют и для каждой подсистемы можно построить $\hat{j}_2^2$ и $\hat{j}_{2z}$, $\hat{j}_1^2$ и $\hat{j}_{1z}$. Обозначим собственные состояния подсистемы: $|\chi_1 m_1\rangle$ и $|\chi_2 m_2\rangle$.

В этом случае для всей системы :

1). $\left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle$, если j_1, j_2 фиксировано, то перебираем m_1, m_2, а число состояний , описывающих систему с Н будет $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

Система будет описываться операторами (коммутирующими): $\hat{H}, \hat{j}_1^2, \hat{j}_{1z}, \hat{j}_2^2, \hat{j}_{2z}$.

2). Другое описание той же системы. Мы строим полный оператор углового момента системы:

$$\hat{J}_i = \hat{j}_{i1} + \hat{j}_{i2} \qquad (i = x, y, z)$$

Коммутационные соотношения выполняются. Для оператора $\hat{J}_i$ можно построить собственные состояния. Обозначим их $\left| JMj_1 j_2 \right\rangle$.

$$\hat{J}^2 \left| JMj_1 j_2 \right\rangle = j(j+1) \left| JMj_1 j_2 \right\rangle$$

$$\hat{J}_z \left| JMj_1 j_2 \right\rangle = M \left| JMj_1 j_2 \right\rangle$$

Эти же состояния являются собственными для $\hat{j}_1^2$ и $\hat{j}_2^2$. Полный набор операторов во втором случае: $\hat{H}, \hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$.

Оператор $\hat{j}_{1z}$ не коммутирует с $\hat{J}^2$.

$$[\hat{j}_{1z}, \hat{J}^2] \neq 0$$

Значит эти два представления не совпадают друг с другом, но в квантово-механическом смысле, т.к. они описывают одну систему, то должны быть связаны унитарным преобразованием:

$$\left| JMj_1 j_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C\left(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid JM\right) \left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle$$

$C(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid JM)$ - **<u>коэффициенты Клебша-Гордона</u>**.

<u>Основные свойства коэффициентов Клебша-Гордона</u>.

1. Преобразование унитарное, вещественность коэффициентов $\Rightarrow$ прямое преобразование совпадает с обратным.

$$\left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{JM} C\left(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid JM\right) \left| JMj_1 j_2 \right\rangle$$

2. Ортонормированность.

а). $$\sum_{m_1 m_2} C\left(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid JM\right) \cdot C\left(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid J'M'\right) = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

б) $$\sum_{JM} C\left(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid JM\right) \cdot C\left(j_1 m_1' j_2 m_2' \mid JM\right) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

3. Правило треугольника. $\Delta\left(j_1 j_2 J\right)$

$C(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid JM) \neq 0$ только тогда, когда $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ (Правило отбора).

Правило отбора по m $\quad M = m_1 + m_2$

4. Симметрии.

Введем новый символ.

$$C(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_3 - m_3) = \sqrt{2j_3+1}(-1)^{j_1 - m_3 - j_2} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix}$$

Выражение, стоящее в скобках, называется 3j – символом или **<u>коэффициентом Вигнера.</u>**

а). Если у нас производится нечетная перестановка столбцов, то имеем :

$$\begin{pmatrix} j_2 j_1 j_3 \\ m_2 m_1 m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix}$$

б). При четной перестановке 3j- символ не меняет ни величины, ни значения:

$$\begin{pmatrix} j_2 j_3 j_1 \\ m_2 m_3 m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix}$$ - циклическая перестановка не меняет знака.

в). Если у всех проекций моментов заменим знаки на противоположные, то

$$\begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ -m_1 - m_2 - m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3 \end{pmatrix}$$

Используя эти соотношения, можно установить свойства симметрии коэффицентов Клебша-Гордона.

5. $C(j_1 0 j_2 0 \mid j_3 0) \neq 0$ только тогда, когда $j_1 + j_2 + j_3 = 2n$ - четное число (правило отбора).

Сложение трех угловых моментов.Коэффициенты Рака.

Пусть имеем $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$,каждая подсистема обладает своим угловым моментом: $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_{1z}$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_{2z}$: $\hat{j}_3^2$, $\hat{j}_{3z}$. Поскольку взаимодействие между подсистемами отсутствует, можно построить произведени$\left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle \left| j_3 m_3 \right\rangle$ - это собственные состояния полного набора операторов.

А. Схема сложения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}' \\ \vec{j}' + \vec{j}_3 = \vec{J} \end{array} \right.$$

Для этой схемы сложения полный набор коммутирующих операторов: $\hat{H}$, $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}_3^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z, (\hat{j}')^2$,а соответствующие собственные значения $\left| JMj_1 j_2 j' j_3 \right\rangle_A$.

В Другая схема сложения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_2 + \vec{j}_3 = \vec{j}''. \\ \vec{j}'' + \vec{j}_1 = \vec{J} \end{array} \right.$$

Полный набор коммутирующих операторов: $\hat{H}$, $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{j}_3^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z, (\hat{j}'')^2$, а соответствующие собственные значения$\left| JMj_2 j_3 j'' j_1 \right\rangle_B$.

Эти два представления А и В должны быть связаны унитарным преобразованием, так как они дают полное эквивалентное описание системы: $\left| JMj_1 j_2 j' j_3 \right\rangle_A = \sum_{j''} \sqrt{(2j'+1)\cdot(2j''+1)} \cdot W\left(j_1 j_2 J j_3 \mid j' j''\right) \cdot \left| JMj_2 j_3 j'' j_1 \right\rangle_B$.

Это соотношение можно рассматривать как определение **коэффициентов Рака.** Коэффициенты Рака W можно связать с коэффициентами Клебша-Гордона С.

$$W\left(j_1 j_2 J j_3 \mid j' j''\right) \cdot = \frac{1}{\sqrt{(2j'+1)(2j''+1)}} \sum_{m_1 m_2 m_3} C\left(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j' m'\right) \cdot C\left(j' m' j_3 m_3 \mid JM\right) \cdot$$
$$C(j_2 m_2 j_3 m_3 \mid j'' m'') \cdot C(j'' m'' j_1 m_1 \mid JM)$$

Свойства коэффициентов Рака.

1). $W(j_1 j_2 J j_3 \mid j' j'') \neq 0$ тогда и только тогда, когда выполняются 4 правила треугольника.: $\Delta(j_1 j_2 j')$, $\Delta(j' j_3 J), \Delta(j_2 j_3 j''), \Delta(j'' j_1 J)$ - правила отбора.

Часто коэффициенты Рака записывают в виде $W(abcd \mid ef)$, тогда правила треугольника примут следующий вид:

$\Delta(abc)$ $\Delta(cde)$ $\Delta(acf)$ $\Delta(bdf)$

2). $W(abcd \mid ef) = (-1)^{a+b+c+d} \begin{pmatrix} abc \\ def \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} abc \\ def \end{pmatrix}$ - это 6j – символ, в 6j – символе 24 перестановки. Допустимы любые перестановки, которые не меняют правил треугольников.

При всех этих перестановках 6j – символ не меняет величины и знака. Заметим, что коэффициенты Рака при этом могут меняться.

Сложение четырех угловых моментов, 9j-символ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}_{12}. \\ \vec{j}_3 + \vec{j}_4 = \vec{j}_{34} \\ \vec{j}_{12} + \vec{j}_{34} = \vec{J} \end{array} \right. \qquad \left| JMj_1 j_2 j_{12} j_3 j_4 j_{34} \right\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j}_1 + \vec{j}_3 = \vec{j}_{13}. \\ \vec{j}_2 + \vec{j}_4 = \vec{j}_{24} \\ \vec{j}_{13} + \vec{j}_{24} = \vec{J} \end{array} \right. \qquad \left| JMj_1 j_3 j_{13} j_2 j_4 j_{24} \right\rangle$$

Они связаны унитарным преобразованием

$$\left| JMj_1 j_2 j_{12} j_3 j_4 j_{34} \right\rangle = \sum_{j_{13} j_{24}} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)} \cdot \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_{21} & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} \cdot \left| JMj_1 j_3 j_{13} j_2 j_4 j_{24} \right\rangle$$

Соотношение в { } есть 9j-символ.

Правило треугольников.

$\Delta(j_1 j_2 j_{12})$, $\Delta(j_3 j_4 j_{34}), \Delta(j_{13} j_{24} j), \Delta(j_1 j_3 j_{13}), \Delta(j_2 j_4 j_{24})$, $\Delta(j_{12} j_{34} j)$

9j-символ обладает свойством симметрии, и возможны любые перестановки, не меняющие правил треугольника.

Приложение для двух нуклонов в ядре.

Для них возможны два вида связи:

а)

$s_1 \quad l_1 \qquad \bar{s}_1 + \vec{l}_1 = \vec{j}_1$

$s_2 \quad l_2 \qquad \vec{s}_2 + \vec{l}_2 = \vec{j}_2$ Это так называемая j-j связь.

$\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{J}$

б) $\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \vec{S}$

$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{L}$ Это $L - S$ связь.

$\vec{L} + \vec{S} = \vec{J}$

$$\left| JMl_1 s_1 j_1 l_2 s_2 j_2 \right\rangle = \sum_{LS} \sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)(2S+1)(2L+1)} \cdot \begin{Bmatrix} l_1 & s_1 & j_1 \\ l_2 & s_2 & j_2 \\ L & S & J \end{Bmatrix}$$

$$\cdot \left| JMl_1 l_2 L s_1 s_2 S \right\rangle$$

Что представляет из себя $\sum\limits_{LS}$?

$s_1 = 1/2$ $\quad |s_1 - s_2| \le s \le s_1 + s_2 \quad \Rightarrow s = 0;1$

$s_2 = 1/2$ $\quad |L - S| \le j \le L + S \quad \Rightarrow s = 0 \to j = L$

$s = 1 \to L = j-1, j, j+1$

Как видим сумма содержит всего 4 слагаемых.

<u>Другой пример -система из n невзаимодействующих подсистем</u>.
Ее базис можно представить в виде:
$\left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle \ldots\ldots\ldots\left| j_n m_n \right\rangle$
Основные физические величины не коммутируют с операторами подсистем: $\hat{j}_1^2, \hat{j}_{1z}$. …..И это представление не является диагональным, а диагональным будет представление $\left| JMj_1 \ldots\ldots\ldots \right\rangle$. Для получения базиса в этом представлении нужно сложить моменты.

<u>Z – коэффициенты.</u>

$$\overline{Z}(abcd \mid ef) = \sqrt{(2a+1)(2b+1)(2c+1)(2d+1)} \cdot\cdot C(a0c0 \mid f0) W(abcd \mid ef)$$

$$Z(abcd \mid ef) = i^{f-a+c}\, \overline{Z}(abcd \mid ef)$$

Коэффициенты Блатта-Биденхарна. Для них 5 правил отбора: 4 правила треугольника и $a + c + f = 2n$