

### **Факультатив. Введение.**

Лектор — Крылов Игорь Ратмирович, комната Б101 физического факультета СПбГУ.

Конспект лекций в виде pdf файлов и ссылки на видеофайлы лекций можно найти на сайте физического факультета: <http://www.phys.spbu.ru/> → БИБЛИОТЕКА → Лекции для студентов → И.Р. Крылов → Лекции по оптике.

Рабочий телефон: (+7-812-)428-44-66.

Интернет страница: [igor-krylov.ru](http://igor-krylov.ru)

Электронная почта: [igor-krylov@yandex.ru](mailto:igor-krylov@yandex.ru)

Вход-выход — свободный, на лекции можно приносить чай, кофе и еду.

Вопросы, замечания, возражения — по ходу лекций.

Изложение материала лекций будет в системе единиц СГС Гаусса, некоторые формулы факультативно будут и в системе СИ.

Литература.

1. Е. И. Бутиков. Оптика: учебное пособие для студентов физических специальностей вузов. — СПб.: Невский Диалект; БХВ — Петербург, 2003, 480с.

2. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. — М.: Наука, 1973, 720с.

3. Р. В. Поль. Оптика и атомная физика. — М.: Наука, 1966, 552с. (факультативно).

4. Г. С. Ландсберг. Оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 848с. (факультативно).

5. Д. В. Сивухин. Курс общей физики. Т.4. Оптика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, 792с. (факультативно)

6. А. Н. Матвеев. Оптика. — М.: Высш. шк., 1985, 351 с. (факультативно)

7. И. Р. Крылов. Методические указания к решению задач по оптике (факультативно).

### **Факультатив. Оптика.**

Оптика — это наука о свете. Свет — это электромагнитные волны. Волны могут быть разных частот и соответствующих им длин волн. Совокупность световых волн разных частот — это спектр света. В узком смысле свет — это волны видимого диапазона спектра с длинами волн от 0.4 мкм до 0.7 мкм, где  $1\text{ мкм} = 10^{-6}\text{ м}$ .

Оптика заметно отличается от других разделов общей физики тем, что оптика — это сугубо прикладной раздел. Вся классическая оптика — это частные случаи применения системы уравнений Максвелла. Если курс электричества строится по пути от экспериментальных законов к общим уравнениям, то оптика — наоборот, от общих уравнений к частным явлениям.

В результате содержание оптики — это оптические методы подходов к задачам, которые состоят в различных упрощениях уравнений Максвелла, и оптические явления, которые интерпретируются на основе этих упрощений.

В оптическом диапазоне частот магнитная проницаемость  $\mu$  любой среды близка к магнитной проницаемости вакуума, для которого  $\mu = 1$ . Поэтому в оптических формулах обычно  $\mu$  просто отсутствует. Мы будем стараться оставлять сомножитель  $\mu$ , когда это будет возможно. Магнитная проницаемость  $\mu$  — это коэффициент пропорциональности между магнитной индукцией  $\vec{B}$  и напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Причина равенства  $\mu = 1$  заключается в отсутствии парамагнетизма для переменного магнитного поля оптической частоты. Дело в том, что магнитные диполи атомов не успевают поворачиваться за магнитным полем, если оно изменяется с оптической частотой. Характерное время поворота диполя — это время между двумя столкновениями атомов. Под действием только магнитного поля угол между направлением магнитного диполя атома и направлением самого магнитного поля не изменяется, так как магнитное поле приводит к ларморовской прецессии магнитного диполя вокруг магнитного поля. Изменение угла между диполем и полем происходит только во время столкновений атомов. В ферромагнетиках изменение ориентации домена возможно только на еще более низких частотах. В диамагнетиках  $\mu$  близко к единице, и его отличие от единицы можно не учитывать.

### Экзамен. Излучение ускоренно движущегося заряда.

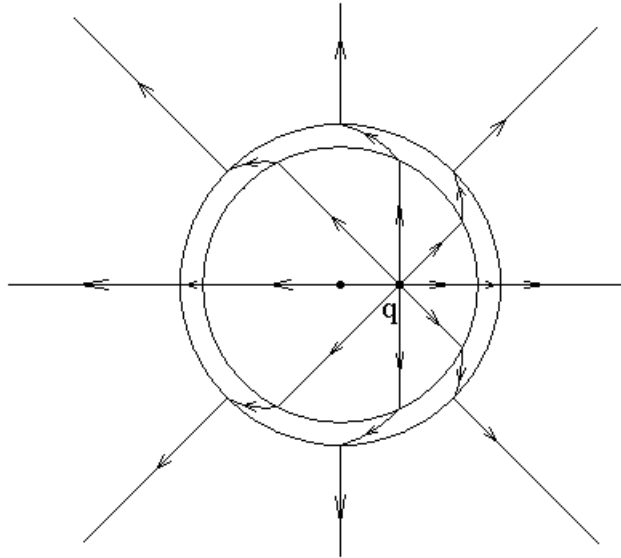
В вакууме для любого объема, который не включает в себя заряды, поток поля  $\vec{E}$  равен нулю  $\Phi_E = 4\pi Q = 0$ , значит, сколько линий поля втекает в объем, столько и вытекает из объема. Если рассмотреть только один точечный заряд, то линии поля  $\vec{E}$  начинаются на заряде и заканчиваются на бесконечности независимо от движения заряда.

Если заряд подергать, то по линиям поля  $\vec{E}$ , как по струнам, побегут волны со скоростью  $c$ . Это и есть электрическая составляющая электромагнитных волн. Переменное электрическое поле порождает магнитное поле, поэтому побегут и волны магнитного поля.

Единственно возможный источник излучения электромагнитных волн — это ускоренно движущиеся заряды.

Давайте подробнее рассмотрим заряд, который бесконечно долго покоился, затем кратковременно ускорился и стал двигаться с постоянной скоростью  $\vec{V}$  слева направо.

В нерелятивистском приближении при  $V \ll c$  напряженность электрического поля  $\vec{E}$  заряда, движущегося с постоянной скоростью, такая же, как и напряженность поля покоящегося заряда.



Пусть информация об ускоренном движении заряда достигла со скоростью  $c$  области между двумя близкими сферами. Внутри меньшей сферы имеем линии поля  $\vec{E}$  заряда, движущегося с постоянной скоростью. Снаружи большей сферы имеем линии поля  $\vec{E}$  заряда, покоящегося в центре сфер, так как информация о начале движения заряда не успела добраться до этой области, распространяясь со скоростью  $c$ .

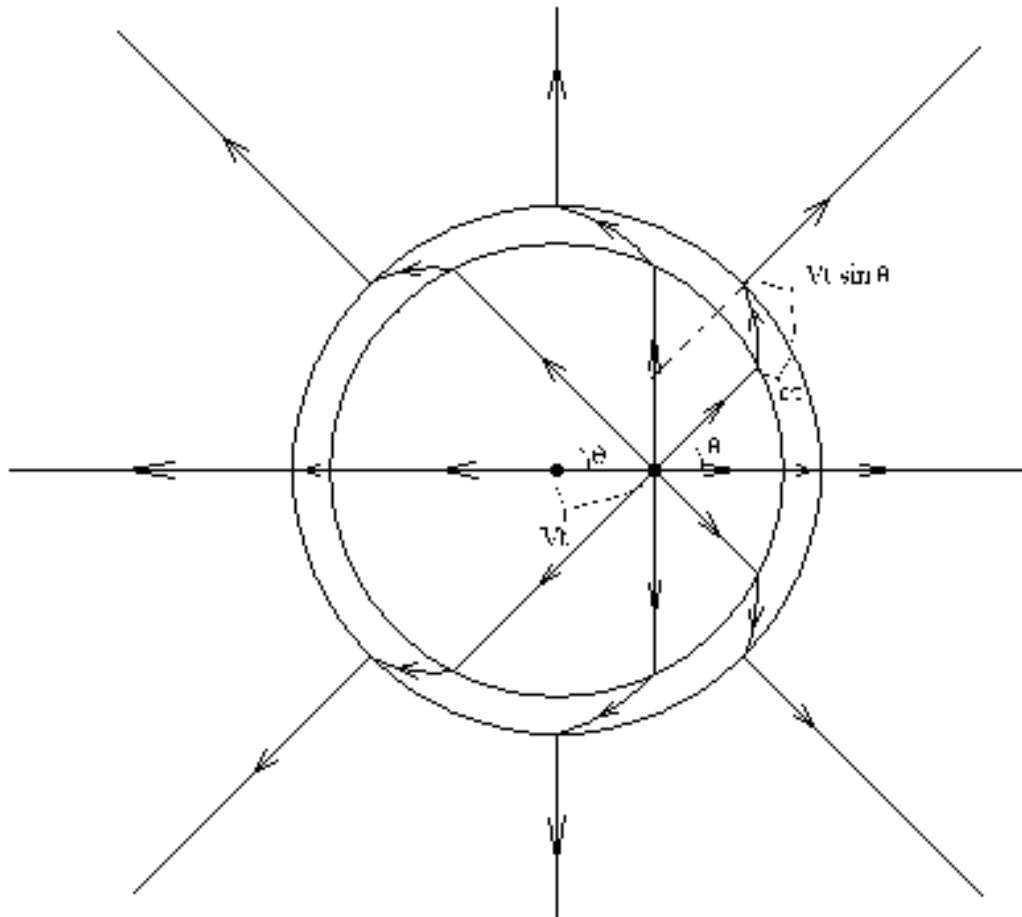
Область между сферами содержит поле ускоренно движущегося заряда. Это и есть электрическое поле излучения ускоренно движущегося заряда.

### **Экзамен. Напряженность поля излучения диполя.**

(излучение осциллятора)

Излучение диполя такое же, как и излучение одного заряда, если считать, что второй заряд диполя неподвижен, и расположен, например, в центре рассмотренных выше сфер. Заметим, что незаряженный атом излучает свет, как осциллирующий электрический диполь.

Рассмотрим прежний рисунок. Будем считать, что заряд двигался малое время  $\tau$  с ускорением  $a$ , а затем в течении большого времени  $t$  заряд двигался с постоянной скоростью  $V = a\tau$ . Рассмотрим излучение заряда (напряженность электрического поля между двумя сферами) в направлении, которое составляет угол  $\theta$  с направлением движения заряда.



Заряд ускоренно двигался на протяжении времени  $\tau$ , следовательно, расстояние между двумя сферами равно  $c\tau$ , так как в этой области находится излучение ускоренно двигавшегося заряда, распространяющееся со скоростью  $c$ . Заряд переместился за время  $t$  на расстояние  $Vt$ . Рассматриваемая в направлении  $\theta$  линия поля  $E$  должна переместиться вдоль поверхности сфер на отрезок  $Vt \sin(\theta)$ . Поток вектора  $E$  через сферу любого радиуса равен  $4\pi q = E_r \cdot 4\pi r^2$ , откуда  $E_r = \frac{q}{r^2}$ . Составляющую электрического поля вдоль поверхности сфер  $E_\theta$  можно найти через составляющую электрического поля вдоль радиуса сфер  $E_r = \frac{q}{r^2}$  с помощью видимого на рисунке направления поля  $E$ , которое определяется величинами  $c\tau$  и  $Vt \sin(\theta)$ :

$$\frac{E_r}{E_\theta} = \frac{c\tau}{Vt \sin(\theta)}, \text{ тогда}$$

$$E_\theta = E_r \frac{Vt \sin(\theta)}{c\tau}$$

Подставим сюда  $E_r = \frac{q}{r^2}$  и  $V = a\tau$ , тогда

$$E_{\theta} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{at \sin(\theta)}{c}$$

Подставим  $r = ct$  вместо одной степени  $r$  в знаменателе и получим

$$E_{\theta} = \frac{q}{r} \cdot \frac{a \sin(\theta)}{c^2}$$

Если считать, что в центре сфер находится еще один неподвижный заряд  $(-q)$ , то пара зарядов образует диполь  $p = ql$ . Возьмем вторую производную от этого равенства по времени и получим  $\ddot{p} = qa$ , где  $a$  — ускорение движущегося заряда  $q$ , тогда

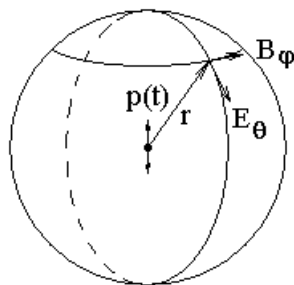
$$E_{\theta} = \frac{\ddot{p} \sin(\theta)}{c^2 r}$$

Составляющая поля  $E_{\theta} \sim \frac{1}{r}$  спадает с увеличением расстояния медленнее,

чем составляющая  $E_r = \frac{q}{r^2}$ , и можно считать  $E \approx E_{\theta}$ . Позднее мы докажем, что в каждый момент времени магнитное поле в бегущей световой волне перпендикулярно направлению движения волны, перпендикулярно электрическому полю, и магнитное поле равно по величине электрическому. Вместо горизонтального диполя рассмотрим вертикальный диполь, тогда окончательно получаем излучение точечного диполя в виде:

$$E_{\theta} = B_{\varphi} = \frac{\sin(\theta)}{c^2 r} \frac{\partial^2 p_z \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2}, \text{ где } p_z \left( t - \frac{r}{c} \right) \text{ — проекция дипольного}$$

момента на ось  $z$  не в момент времени  $t$ , а в момент времени  $\left( t - \frac{r}{c} \right)$ , который предшествует моменту  $t$  на время распространения излучения  $\frac{r}{c}$  от места ускоренного движения заряда до точки наблюдения излучения диполя. Подразумевается, что другие проекции дипольного момента, кроме  $p_z$ , равны нулю.



Это электромагнитное поле обладает следующими свойствами.

1).  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot [\vec{E}, \vec{H}] \uparrow\uparrow \vec{r}$  — энергия течет от диполя вдоль радиус-

вектора.

2).  $E = B$  в каждой точке пространства и в каждый момент времени (это будет доказано позднее).

3).  $\vec{E} \perp \vec{B}$  в каждой точке пространства и в каждый момент времени (это будет доказано позднее).

4). Вектор  $\vec{E}$  принадлежит плоскости векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{r}$ .

5).  $E = B \sim \frac{1}{r}$ , что естественно, так как вектор Пойнтинга обязан спадать, как  $\frac{1}{r^2}$ , чтобы в единицу времени через сферу любой площади  $4\pi r^2$  протекала одна и та же энергия.

Факультативная вставка.

Наряду с излучением электрического диполя можно рассмотреть излучение магнитного диполя, поле которого имеет порядок  $\frac{V}{c}$  по отношению к полю  $\vec{E}$  излучения электрического диполя. Электромагнитное поле излучения магнитного диполя имеет вид:

$$E_\varphi = -B_\theta = -\frac{\sin(\theta)}{c^2 r} \cdot \frac{\partial^2 m_z \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2}$$

Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  излучения любого мультипольного момента спадают с расстоянием, как  $\frac{1}{r}$ . Излучение мультипольных моментов более высоких порядков мало, если размер излучающей системы мал по сравнению с длиной волны излучения.

Конец факультативной вставки.

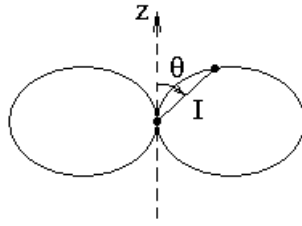
Экзамен. Диаграмма направленности излучения диполя.

Рассмотрим излучение диполя, который изменяется только вдоль оси  $z$ .

$$E = B \sim \sin(\theta) \Rightarrow$$

$$I \equiv \langle |\vec{S}| \rangle_t = \left\langle \left| \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \right| \right\rangle_t \sim \langle EB \rangle_t \sim \sin^2(\theta).$$

Здесь  $I$  — интенсивность излучения,  $\langle \rangle_t$  — среднее по времени значение.



Из начала координат для каждого направления отложим отрезок, длина которого пропорциональна интенсивности излучения диполя в данном направлении, и поставим точку в конце отрезка. Соединим точки в концах отрезков для всех направлений и получим поверхность, которую называют диаграммой направленности излучения диполя.

Поверхность имеет вид тора с точечной дыркой в середине.

Вид поверхности показывает, что излучения вдоль диполя (вдоль оси  $z$ ) нет. Излучение максимально в направлении перпендикулярном диполю.

### **Факультатив. Световые волны в прозрачной изотропной среде.**

В качестве первого варианта упрощения уравнений Максвелла рассмотрим световые волны в прозрачной изотропной среде. Вакуум можно рассматривать, как частный случай прозрачной изотропной среды с единичной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и единичной магнитной проницаемостью  $\mu$ .

Для прозрачной изотропной среды выполняется условие  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  пропорциональности вектора электрического смещения  $\vec{D}$  и вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , хотя в общем случае в оптике это условие пропорциональности не выполняется. Например, для среды поглощающей свет, которая будет рассмотрена позднее, колебания векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  сдвинуты по фазе. При этом векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не могут быть пропорциональны в обычном смысле, так как обращаются в ноль в разные моменты времени.

Кроме того, в сильных световых полях, когда электрическое поле  $\vec{E}$  световой волны сравнимо по величине с электрическим полем внутри атома (полем между электронами и атомным ядром), связь между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  становится нелинейной. Нелинейная оптика в минимальном объеме будет рассмотрена в конце курса.

Также в минимальном объеме будут рассмотрены квантовые подходы в оптике.

Для анизотропной среды диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  — матрица или тензор второго ранга, что будет подробнее рассмотрено в разделе кристаллооптики.

Будем считать, что в прозрачной среде нет свободных зарядов  $\rho = 0$  и нет токов проводимости  $\vec{j} = 0$ . Свободные заряды в оптическом поле будут кратко рассмотрены в разделе оптики плазмы.

**Экзамен. Волновые уравнения для светового поля в прозрачной изотропной среде.**

Венцом построения теории электромагнетизма является система уравнений Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. , \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array} \right.$$

В системе СИ: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{array} \right. , \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Рассмотрим одно из уравнений системы Максвелла:

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ возьмем от него ротор и получим:}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{H}).$$

Подставим значение  $\operatorname{rot}(\vec{H})$  в правую часть равенства из другого уравнения Максвелла  $\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , и, с учетом отсутствия токов проводимости  $\vec{j} = 0$  в рассматриваемой прозрачной изотропной среде, получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot}(\vec{H})) = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.1).$$

С другой стороны:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]],$$

где  $\vec{\nabla}$  — дифференциальный оператор или вектор набла:



$$\vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

где  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  — единичные векторы, направленные по осям  $x, y, z$ .

Квадрат набла равен лапласиану:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Правую часть равенства  $rot(rot(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]]$  можно преобразовать по правилу "бац минус цап" для двойного векторного произведения:

$$rot(rot(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как в рассматриваемой среде нет свободных зарядов:

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) = div(\vec{E}) = div\left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} div(\vec{D}) = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} = 0.$$

Тогда останется только второе слагаемое и

$$rot(rot(\vec{E})) = -\vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\Delta \vec{E} \quad (1.2).$$

Приравнявая друг другу правые части равенств (1.1) и (1.2) для одной и той же величины  $rot(rot(\vec{E}))$ , получим дифференциальное уравнение для поля  $E$ :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

В математике похожее уравнение  $\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$  для неизвестной функции  $A$  от координат и времени называется волновым уравнением, тогда

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{— волновое уравнение для электрического поля } \vec{E}.$$

Сравнивая это уравнение с волновым уравнением математики, получаем:

$$V \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Как выяснится позднее,  $V$  — это фазовая скорость плоских волн, которые являются решением волнового уравнения.

Аналогично, рассмотрев  $rot(rot(\vec{H}))$  вместо выражения  $rot(rot(\vec{E}))$ , можно получить волновое уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \vec{B} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

### Факультатив. Частные решения волнового уравнения.

Общее решение волнового уравнения можно представить, как суперпозицию его частных решений.

Основной метод поиска частных решений дифференциальных уравнений в частных производных — это метод разделения переменных.

Метод разделения переменных позволяет найти решения уравнений многих типов: волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера в квантовой механике и других уравнений.

Рассмотрим волновое уравнение для некоторой переменной величины  $A(t, \vec{r})$ :

$$\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Будем искать решения этого уравнения в виде произведения двух функций:

$$A(t, \vec{r}) = T(t) \cdot R(\vec{r}),$$

одна из которых зависит только от времени, а другая — только от координат.

Таких решений окажется настолько много, что нам их будет достаточно. Любая линейная комбинация этих решений тоже будет решением, что следует из линейности уравнения относительно неизвестной функции  $A$ .

Подставим  $A = TR$  в волновое уравнение для величины  $A$  и получим:

$$\Delta(TR) - \frac{1}{V^2} \cdot (TR)'' = 0, \text{ где две точки — это обозначение второй}$$

производной по времени.

Вынесем функцию времени  $T$  за вторые производные по координатам в операторе Лапласа  $\Delta$ , а функцию координат  $R$  вынесем за вторую производную по времени:

$$T \Delta R - \frac{1}{V^2} R T'' = 0.$$

Разделим это равенство на произведение  $TR$  и получим:

$$\frac{\Delta R}{R} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{T''}{T} = 0.$$

Здесь первое слагаемое зависит только от радиус-вектора  $\vec{r}$ , а второе — только от времени  $t$ . Это возможно только в том случае, если оба слагаемых равны одной и той же константе.

Обозначим эту константу, как  $(-k^2)$ , тогда

$$\begin{cases} \frac{\Delta R}{R} = -k^2 \\ \frac{1}{V^2} \cdot \frac{T''}{T} = -k^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta R + k^2 R = 0 \\ T'' + (kV)^2 T = 0 \end{cases}.$$

В случае, если константа  $(-k^2)$  окажется положительной, будем считать, что  $k$  — чисто мнимое число. Так при рассмотрении вопроса о полном внутреннем отражении, одна из проекций вектора  $\vec{k}$  действительно окажется мнимой.

Для пространственной части решения волнового уравнения получим

$$\Delta R + k^2 R = 0 \text{ — уравнение Гельмгольца.}$$

А для временной части получим

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \text{ — уравнение гармонических колебаний, где для краткости введено обозначение } \omega \equiv kV .$$