

Факультатив. Частные решения волнового уравнения (продолжение).

Комплексные решения этих уравнений выглядят проще, чем вещественные решения. Поэтому обычно ищут комплексные решения, а затем рассматривают вещественную часть комплексного решения. Для линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть общего комплексного решения является общим вещественным решением.

Будем комплексные величины обозначать волной над соответствующей величиной, тогда \tilde{T} в наших обозначениях — комплексная величина, а T — вещественная величина.

Общее комплексное решение уравнения гармонических колебаний имеет следующий вид:

$$\tilde{T} = \tilde{T}_{01} e^{i\omega t} + \tilde{T}_{02} e^{-i\omega t},$$
 где \tilde{T}_{01} и \tilde{T}_{02} — комплексные произвольные константы интегрирования.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$$\tilde{T} = \tilde{T}_0 e^{-i\omega t},$$
 где ω принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками.

Знак минус в показателе мнимой экспоненты — это вопрос соглашения. \tilde{T}_0 — произвольная комплексная константа интегрирования, различная для положительного и отрицательного значений ω .

Вернемся теперь к рассмотрению пространственной части решения волнового уравнения — к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta R(\vec{r}) + k^2 R(\vec{r}) = 0.$$

Продолжим поиск частных решений волнового уравнения методом разделения переменных. Будем теперь искать решение уравнения Гельмгольца методом разделение переменных в декартовых координатах. Ищем решение уравнения Гельмгольца для пространственной части решения волнового уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной координаты:

$$R(\vec{r}) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z).$$

Подставим $R = XYZ$ в уравнение Гельмгольца и получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (XYZ) + k^2 XYZ = 0.$$

Вынесем за знак производной по x -координате функции Y и Z , величины которых не зависят от переменной x . Аналогично поступим с производными по y и z . Тогда получим:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + k^2 XYZ = 0,$$

где двумя штрихами обозначена вторая производная в каждом случае по своей переменной величине.

Разделим это равенство на произведение функций XYZ и получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2,$$

где первое слагаемое зависит только от x -координаты, второе — только от y , третье — только от z . Это возможно только в том случае, если каждое из этих слагаемых — константа. Обозначим эти константы, как $(-k_x^2)$, $(-k_y^2)$, $(-k_z^2)$. Тогда

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2,$$

и величины k_x , k_y , k_z можно рассматривать, как проекции некоторого вектора \vec{k} .

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = -k_x^2 \\ \frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \\ \frac{Z''}{Z} = -k_z^2 \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее первое из трех уравнений.

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad \Rightarrow \quad X'' + k_x^2 X = 0 \quad \text{— это уравнение}$$

гармонических колебаний только не от времени, а от пространственной координаты x .

$\tilde{X} = \tilde{X}_{01} e^{ik_x x} + \tilde{X}_{02} e^{-ik_x x}$ — общее комплексное решение этого уравнения.

Общее решение уравнения гармонических колебаний можно получить, как линейную комбинацию решений вида:

$\tilde{X} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x}$, где k_x принимает два возможных значения с одинаковым модулем, но разными знаками. То, что выбрано слагаемое без минуса в экспоненте — это вопрос соглашения.

Аналогично:

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \\ \tilde{Z} = \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} \end{cases}$$

Подставим \tilde{X} , \tilde{Y} , \tilde{Z} в \tilde{R} и получим:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} = \tilde{X}_0 e^{ik_x x} \tilde{Y}_0 e^{ik_y y} \tilde{Z}_0 e^{ik_z z} = \\ &= \tilde{X}_0 \tilde{Y}_0 \tilde{Z}_0 e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} = \tilde{R}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = \tilde{R}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \end{aligned}$$

— это частное решение уравнения Гельмгольца.

Вернемся к решению волнового уравнения $\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$:

$$\tilde{A}(t, \vec{r}) = \tilde{R}\tilde{T} = \tilde{R}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \cdot \tilde{T}_0 e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)},$$

где \tilde{A}_0 — произвольная комплексная константа интегрирования.

$\tilde{A} = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}$ — частное комплексное решение волнового уравнения в виде плоских монохроматических волн.

То, что эта волна плоская, будет видно из анализа решения в последующих вопросах. Монохроматическая волна — это волна, в каждой пространственной точке которой колебания происходят только на одной частоте ω . Напомним, что величины k и ω не являются независимыми, так как произведение kV было нами обозначено, как $\omega = kV$, где $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — параметр

волнового уравнения $\Delta A - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$.

Есть причина, по которой решение в виде плоских монохроматических волн играет большую роль в оптике.

Дело в том, что с помощью преобразования Фурье по времени и координатам можно любую функцию этих переменных разложить по плоским монохроматическим волнам, если только функция достаточно быстро спадает на временных и пространственных бесконечностях.

Любое явление, такое как отражение, преломление, рассеяние, поглощение света, можно сначала рассмотреть для плоской монохроматической волны, а затем для любого света, как суперпозиции плоских волн.

Есть еще одна причина, по которой плоские монохроматические волны играют большую роль в оптике.

Взаимодействие любой световой волны с веществом с хорошей точностью такое же, как и взаимодействие плоской световой волны. Это справедливо в том случае, если радиусы кривизны поверхности равных фаз световой волны достаточно велики. Велики по сравнению с чем? Есть два параметра с размерностью длины — это длина волны и размер атома. Характерный размер атома составляет десятые доли нанометра, что в тысячу раз меньше длины волны света, а саму длину волны света в оптике обычно рассматривают, как малый параметр по сравнению с геометрическими размерами предметов.

Другими словами, если рассмотреть маленький объем, линейные размеры которого гораздо меньше радиусов кривизны поверхности равных фаз, то в этом объеме волну можно считать почти плоской.

Это позволяет рассматривать отражение, преломление, поглощение и рассеяние света на примере плоской световой волны, так как всегда можно будет выбрать достаточно малый объем, в котором световую волну можно будет считать почти плоской и рассматривать отражение, преломление, поглощение или рассеяние света в этом малом объеме.

Плоская симметрия решений связана с тем, что в уравнении Гельмгольца мы разделяли переменные в декартовой системе координат.

Если при решении уравнения Гельмгольца разделять переменные в цилиндрической системе координат, то получатся решения волнового уравнения в виде цилиндрических волн. Интересно, что среди этих волн есть волны, которые бегут вдоль оси и одновременно вокруг нее. В связи с этим у фотона образуется так называемый орбитальный угловой момент:

<http://igorivanov.blogspot.ru/2011/04/oam.html>

Заметим, что фотон с орбитальным угловым моментом может иметь одну частоту, то есть соответствовать монохроматическому свету. В таком случае через промежуток времени равный периоду волны поверхность равных фаз перейдет сама в себя. Ясно, что далеко от выделенной оси поверхность равных фаз сместится на длину волны, тогда и во всем пространстве она сместится на длину волны вдоль выделенной оси. Около выделенной оси направление движения волны перпендикулярное поверхности равных фаз составляет заметный угол с осью. В результате окажется, что даже в вакууме скорость световой волны отличается от константы c и равна константе c , умноженной на косинус угла между выделенной осью и направлением движения волны.

Если разделять переменные в сферической системе координат, то получатся сферические волны; если в трехмерной эллиптической системе — гауссовы пучки, похожие на лазерные пучки лучей, которые мы кратко рассмотрим позднее.

Экзамен. Параметры плоской монохроматической волны.

$\tilde{A}(t, \vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}$ — плоская монохроматическая волна в комплексной форме.

Если эту плоскую монохроматическую волну подставить в волновое уравнение $\Delta \tilde{A} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = 0$, то оно превращается в тождество при условии $\omega = kV$. Результат подстановки является доказательством того, что рассматриваемая плоская монохроматическая волна является решением волнового уравнения.

Можно доказать, что для любого линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Тогда $\text{Re} \left(\tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} \right)$ — плоская монохроматическая волна в вещественной форме, она является решением волнового уравнения при условии $\omega = kV$.

Величину \tilde{A}_0 называют комплексной амплитудой волны,

Если представить величину комплексной амплитуды \tilde{A}_0 , как комплексное число в экспоненциальной форме $\tilde{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_0}$, то

A_0 — вещественная амплитуда волны.

φ_0 — начальная фаза волны.

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t, \vec{r}) &= \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} = A_0 e^{i\varphi_0} e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)} = A_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0)} = \\ &= A_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0)} e^{-i\omega t} = \tilde{A}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

здесь $\tilde{A}_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})}$ — комплексная амплитуда колебаний в точке с радиус-вектором \vec{r} ,

$((\vec{k}, \vec{r}) + \varphi_0)$ — начальная фаза колебаний в точке с радиус-вектором \vec{r} ,

$((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0)$ — фаза волны,

ω — циклическая частота волны, которую для краткости обычно будем просто называть частотой волны.

$\omega = 2\pi\nu$, где ν — частота волны.

$\nu = \frac{1}{T}$, где T — период волны.

\vec{k} — волновой вектор, как будет показано в следующем вопросе, он направлен перпендикулярно поверхности равных фаз.

$k \equiv |\vec{k}|$ — волновое число.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — пространственный период волны, который называют длиной волны.

$\frac{1}{\lambda}$ — пространственная частота волны.

Тогда $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — циклическая пространственная частота волны,

k_x, k_y, k_z — циклические пространственные частоты вдоль осей x, y, z .

Экзамен. Фазовая скорость волны.

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — единичные векторы вдоль декартовых осей координат.

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну. Направим ось z вдоль вектора \vec{k} . Тогда $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z \Rightarrow k_x = k_y = 0 \Rightarrow k_z = |\vec{k}| = k$.

Тогда $(\vec{k}, \vec{r}) = k_x x + k_y y + k_z z = kz \Rightarrow$

$((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t + \varphi_0) = kz - \omega t + \varphi_0$ — фаза волны.

Зафиксируем момент времени t и приравняем фазу к константе. Получающееся при этом уравнение относительно пространственных координат

оказывается уравнением поверхности равных фаз или уравнением поверхности постоянной фазы:

$$\left. \begin{array}{l} kz - \omega t + \varphi_0 = \text{const} \\ t = \text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow z = \text{const} \text{ — уравнение поверхности равных}$$

фаз или фазовой поверхности. Поверхность равных фаз называют еще фронтом волны.

Поверхность равных фаз $z = \text{const}$ — это плоскость, следовательно, волна $\tilde{A}(t, \vec{r}) = \tilde{A}_0 e^{i((\vec{k}, \vec{r}) - \omega t)}$ действительно плоская. Поверхность $z = \text{const}$ перпендикулярна единичному вектору \vec{e}_z , направленному вдоль оси z . Вектор \vec{e}_z совпадает по направлению с вектором \vec{k} (направление оси z так было выбрано). Следовательно, для плоской волны фронт волны всегда перпендикулярен волновому вектору \vec{k} .

Неплоскую волну в малом объеме можно считать почти плоской, если радиусы кривизны фронта гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Тогда направление, перпендикулярное поверхности равных фаз, можно считать направлением волнового вектора и для неплоской волны.

Найдем теперь фазовую скорость волн, под которой будем понимать скорость перемещения поверхности равной фазы, фазы равной некоторой постоянной величине.

Ось z опять направим вдоль вектора \vec{k} и продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз $kz - \omega t + \varphi_0 = \text{const}$, в котором координату z будем считать функцией времени t .

$$kz - \omega t + \varphi_0 = \text{const} \quad \left| \quad \frac{d \cdot}{dt} \Rightarrow \right.$$

$$k \frac{dz}{dt} - \omega \frac{dt}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \text{ — фазовая скорость, обозначим ее, как}$$

V_ϕ , тогда

$$V_\phi = \frac{\omega}{k}, \text{ что справедливо для плоской волны любой природы, не только}$$

для световой волны.

Поверхность равных фаз движется вдоль оси z , следовательно, туда же направлена фазовая скорость и с учетом $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{e}_z$ получаем

$$\vec{V}_\phi \uparrow \uparrow \vec{k}.$$

Напомним, что при поиске решения волнового уравнения мы для краткости ввели обозначение $\omega \equiv kV$. Подставляя его в формулу для фазовой скорости $V_\phi = \frac{\omega}{k}$, получим $V_\phi = V$.

Как было показано в вопросе "Световые волны в прозрачной изотропной среде" $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$. Тогда фазовая скорость электромагнитных волн равна

$$V_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Из этого равенства можно найти величину показателя преломления n . По определению показателя преломления $V_{\phi} = \frac{c}{n}$. Сравнивая это равенство с

равенством $V_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, получаем

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

$$\text{В оптике } \mu \approx 1 \Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon}.$$

Обычно в оптике $n > 1$ и соответственно $V_{\phi} < c$. Однако, возможно выполнение условий $0 < n < 1$ и $V_{\phi} > c$. Наконец, в некоторых экзотических ситуациях фазовая скорость может оказаться даже отрицательной величиной. Подробнее смотрите работу:

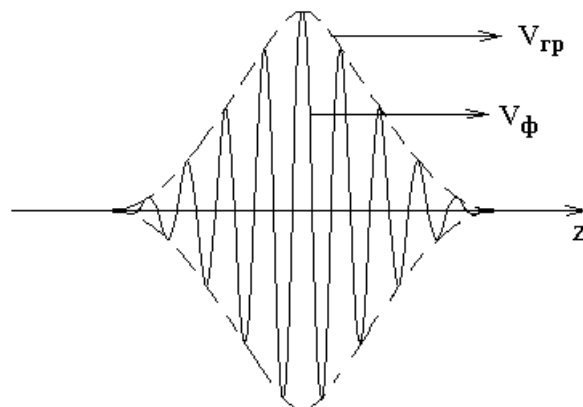
[Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями \$\epsilon\$ и \$\mu\$. // УФН. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517-526.](#)

Такие вещества называются метаматериалами:

<http://ru.wikipedia.org/wiki/Метаматериал>

Экзамен. Групповая скорость волн.

Рассмотрим световой импульс. Импульс имеет огибающую — относительно медленную функцию координат и времени, и имеет заполнение в виде относительно высокочастотной синусоиды, которую еще называют несущей.



Групповая скорость $V_{гр}$ — это скорость движения огибающей светового импульса.

Фазовая скорость V_{ϕ} — это скорость движения заполнения светового импульса.

Групповая скорость отличается от фазовой скорости только в том случае, когда показатель преломления среды n зависит от частоты света ω , то есть при условии $n(\omega) \neq const$. Напомним, что по определению показатель преломления связан с фазовой скоростью $V_\phi = \frac{c}{n}$.

Групповая скорость — понятие не очень строгое. Это связано с тем, что световой импульс в процессе распространения в среде несколько деформируется, а скорость огибающей при деформации импульса теряет смысл.

Рассмотрим нестрогий вывод формулы для групповой скорости.

Пусть две плоские волны с частотами ω_1 и ω_2 распространяются в направлении оси z . Пусть разность частот мала: $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$. Пусть вещественные амплитуды двух волн одинаковы и равны A_0 .

Рассмотрим волны в вещественном представлении:

$$\begin{aligned} A(t, z) &= A_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + A_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \end{aligned}$$

где использовано соотношение

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Введем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_1 + k_2}{2} \equiv k \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \equiv \omega \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = -\frac{\delta\omega}{2} \\ \frac{k_1 - k_2}{2} = -\frac{\delta k}{2} = -\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{\delta\omega}{2} \end{array} \right.$$

Тогда

$$A(t, z) = 2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right) \cdot \cos(kz - \omega t).$$

Здесь $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right)$ — огибающая, которая медленно изменяется при изменении t или z , так как $|\delta\omega| \ll \omega$.

$\cos(kz - \omega t)$ — несущая.

Для рассматриваемой формы огибающей $2A_0 \cos\left(\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}\right)$ можно сказать, что $\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right) \frac{\delta\omega}{2}$ — это фаза огибающей. Тогда групповую скорость или скорость движения огибающей можно найти, как скорость движения поверхности равных фаз огибающей.

С этой целью продифференцируем по времени уравнение поверхности равных фаз огибающей:

$$\left(\frac{dk}{d\omega} z - t \right) \frac{\delta\omega}{2} = const, \text{ считая координату } z \text{ функцией времени, и получим}$$

$$\left(\frac{dk}{d\omega} \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{dt}{dt} \right) \cdot \frac{\delta\omega}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \text{ — скорость движения поверхности равных фаз огибающей или}$$

скорость движения огибающей, она же по определению равна групповой скорости волн V_{gp} . Тогда

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} \text{ — групповая скорость для волны любой природы, не только для}$$

световой волны. Выражение для групповой скорости $V_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ напоминает

выражение для фазовой скорости $V_{\phi} = \frac{\omega}{k}$.

Групповая скорость — это скорость передачи информации, поэтому она не может быть больше скорости света в пустоте $V_{gp} \leq c$. Тем не менее,

неравенство $\frac{d\omega}{dk} > c$ — возможно, но при этом условии световой импульс расплывается быстрее, чем перемещается, и понятие групповой скорости теряет смысл.

Факультатив. Обычно групповая скорость меньше фазовой скорости.

Это следует из неравенства $\frac{dn}{d\omega} > 0$, которое называют условием нормальной дисперсии. Это неравенство будет обосновано позднее.

Дисперсия света — это зависимость показателя преломления от частоты или от длины волны.

$$V_{\phi} = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\omega}{c}, \text{ тогда}$$

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)} = c \frac{d\omega}{d(n\omega)} = \frac{c}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} < \frac{c}{n} = V_{\phi} \quad \Rightarrow$$

$$V_{gp} < V_{\phi} \text{ при условии нормальной дисперсии } \frac{dn}{d\omega} > 0.$$