Экзамен. Поперечность световых волн.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = 0$.

Возьмем от него производную и получим $y'' = 0$.

Общее решение второго уравнения имеет вид: $y = ax + b$.

Не все решения второго уравнения являются решениями первого уравнения. Лишние решения появились в результате дифференцирования первого уравнения, так как при этом часть информации о решениях была утеряна.

Вернемся к рассмотрению волнового уравнения.

Волновое уравнение для вектора $\vec{E}$ было получено в результате дифференцирования, то есть применения операции $rot(\cdot)$, к одному из уравнений системы Максвелла. Следовательно, не все решения волнового уравнения являются решениями системы уравнений Максвелла.

Подставим вещественное решение волнового уравнения для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в виде плоских монохроматических волн в уравнения Максвелла и проверим, являются ли они решениями уравнений Максвелла.

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right) \qquad \vec{B} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}\right)$$

Для нас будет важно, что оба поля зависят от координат и времени только через их комбинацию в виде $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту комбинацию буквой $\varphi = \left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы φ_0, которая спрятана в комплексных амплитудах $\tilde{\vec{E}}_0$ и $\tilde{\vec{B}}_0$ и может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Что в операторном виде можно записать, как:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial t} = -\omega\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Рассмотрим производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = k_x \frac{d \cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y \frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z \frac{d}{d\varphi} = \vec{k} \frac{d}{d\varphi}.$$

Теперь вернемся к рассмотрению уравнений Максвелла для вещественных плоских монохроматических волн.

$$div\left(\vec{D}\right) = 0 \quad <=> \quad \left(\vec{\nabla}, \vec{D}\right) = 0 \quad => \quad \left(\vec{k}\frac{d}{d\varphi}, \vec{D}\right) = 0 \quad => \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\vec{k}, \vec{D}\right) = 0$$

$$=> \quad \left(\vec{k}, \vec{D}\right) = const.$$

Константа в правой части равенства не зависит ни от координат, ни от времени. Рассмотрим это равенство в некоторый момент времени, а затем рассмотрим его же в другой момент времени через половину периода световой волны. Каждая проекция вектора $\vec{D}$ через половину периода поменяет знак, вектор $\vec{k}$ от времени не зависит, следовательно, левая часть равенства поменяет знак через половину периода. Правая часть равенства тоже обязана поменять знак через половину периода, но она не может измениться, так как она — константа. Такое возможно только при условии, что константа равна нулю. Тогда $\left(\vec{k}, \vec{D}\right) = 0$.

Следовательно

$$\vec{D} \perp \vec{k} \quad => \quad \vec{E} \perp \vec{k}.$$

Аналогично из равенства $div\left(\vec{B}\right) = 0$ получаем $\vec{B} \perp \vec{k}$.

Рассмотрим равенство $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad => \quad \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad =>$

$$\left[\vec{k}\frac{d}{d\varphi}, \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}(-\omega)\frac{d}{d\varphi}\vec{B} \quad => \quad \frac{d}{d\varphi}\left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\frac{d}{d\varphi}\vec{B} \quad =>$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\left[\vec{k}, \vec{E}\right] - \frac{\omega}{c}\vec{B}\right\} = 0 \quad => \quad \left[\vec{k}, \vec{E}\right] - \frac{\omega}{c}\vec{B} = const \quad =>$$

$$\left[\vec{k}, \vec{E}\right] - \frac{\omega}{c}\vec{B} = 0 \quad => \quad \left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{B} \quad => \quad \vec{E} \perp \vec{B}.$$

Тогда векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$, образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

Сравним с тройкой векторов $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$, где $\vec{S}$ — вектор Пойнтинга. Из равенства $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ с учетом ортогональности векторов $\vec{E}, \vec{H}$ получим, что векторы $\vec{E}, \vec{H}, \vec{S}$ тоже образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Следовательно

$\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{S}$ — в прозрачной изотропной среде.

Позднее при рассмотрении кристаллооптики мы получим, что в анизотропной среде векторы $\vec{k}$ и $\vec{S}$ не параллельны. При этом вектор $\vec{k}$ показывает направление движения поверхности равных фаз, а вектор $\vec{S}$ показывает направление движения энергии электромагнитного поля.

В результате рассмотрения этого вопроса приходим к выводу. Для того, чтобы плоские электромагнитные волны были бы решением уравнений Максвелла необходимо, чтобы волны были поперечны $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \end{cases}$, а электрическое поле ортогонально магнитному полю $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Для того чтобы плоские электромагнитные волны были решением системы уравнений Максвелла, требуется выполнение определенного соотношения величин векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, которое обсуждается в следующем вопросе.

Экзамен. Соотношение полей *E* и *H* в бегущей световой волне.

Из условия $\vec{k} \perp \vec{E}$ получим $\sin\left(\vec{k},\vec{E}\right)=1$. Тогда $\left|\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right| = kE$. Применим этот результат к левой части равенства $\left[\vec{k},\vec{E}\right] = \frac{\omega}{c}\vec{B}$ и получим $kE = \frac{\omega}{c}B$ =>

$$cE = \frac{\omega}{k}B \quad => \quad cE = V_{ф}B \quad => \quad cE = \frac{c}{n}B \quad => \quad B = nE \quad =>$$

$$B = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E \quad => \quad \mu H = \sqrt{\varepsilon\mu}\,E \quad => \quad \sqrt{\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H$$

$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$ — в бегущей световой волне энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

В системе СИ: $\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}$ <=> $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,E = \sqrt{\mu_0\mu}\,H$.

В вакууме:

$\begin{cases} E = B \\ \vec{E} \perp \vec{B} \end{cases}$ — в каждой точке и в каждый момент времени.

Если хотя бы одно из двух условий не выполнено, то через эту точку в пространстве проходит не одна волна, а несколько волн в разных направлениях.

Экзамен. Интенсивность света.

Об интенсивности света говорят только либо для одной бегущей волны, либо для суммы волн, которые бегут почти в одном направлении.

По определению интенсивности:

$I \equiv \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t$, где $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга, в системе СИ вектор Пойнтинга $\vec{S} = \left[\vec{E},\vec{H}\right]$ и $I \equiv \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t$.

Интенсивность света I — усредненная по времени плотность потока энергии, то есть энергия, которая в единицу времени протекает через единицу площади, если площадка перпендикулярна свету.

Под временем усреднения подразумевают время реакции приемника света. Ни один приемник света не успевает реагировать на каждое оптическое колебание в отдельности. Иногда удобно считать, что время усреднения бесконечно.

Выразим интенсивность через вещественные поля E и H:

$$I \equiv \left\langle \left|\vec{S}\right| \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle \left| \left[\vec{E}, \vec{H} \right] \right| \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle EH \right\rangle_t = \frac{c}{4\pi}\left\langle E \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E \right\rangle_t = \frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t$$

$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t$ — интенсивность света выражается через электрическое поле, а не через магнитное, так как воздействие света на вещество в основном сводится к воздействию именно электрического поля.

$$\left\langle E^2 \right\rangle_t = \left\langle E_0^2 \cdot \cos^2\left(\omega t\right) \right\rangle_t = \frac{1}{2}E_0^2 = \frac{1}{2}\left|\tilde{E}_0\right|^2 \qquad =>$$

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2.$$

Интенсивность света обычно рассматривается в вакууме, в этом случае выражение для интенсивности упрощается: $I = \frac{c}{4\pi}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{c}{8\pi}E_0^2 = \frac{c}{8\pi}\left|\tilde{E}_0\right|^2$.

В системе СИ: $I = \frac{\varepsilon_0 cn}{\mu}\left\langle E^2 \right\rangle_t = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \frac{\varepsilon_0 cn}{2\mu}E_0^2$.

Поляризация света.
Экзамен. Линейная поляризация.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z, тогда $\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Электромагнитные волны поперечны, следовательно, $\vec{E} \perp \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$. Тогда вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости x, y и может быть выражен следующим образом $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$.

Пусть $E_y = 0$ во все моменты времени, тогда $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$, то есть вектор $\vec{E}$ все время направлен вдоль одной линии.

Такой свет называют линейно поляризованным. Эту же поляризацию называют плоской поляризацией. При этом плоскость поляризации — это плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{k}$.

Для линейной поляризации удобно ввести единичный вектор поляризации

$$\vec{e}_p \parallel \vec{E} \qquad => \qquad \vec{e}_p \perp \vec{k}.$$

С учетом единичного вектора поляризации $\vec{e}_p$ получаем для линейной поляризации света

$$\tilde{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t+\varphi_0\right)}, \text{ где}$$

E_0 — вещественная амплитуда света. Чуть позже выясниться, что в таком же виде может быть выражен свет и любой другой поляризации.

<u>Факультатив. Старое определение плоскости поляризации.</u>

Заметим, что исторически плоскостью поляризации называли не плоскость векторов $\vec{E}$ и $\vec{k}$, а перпендикулярную ей плоскость векторов $\vec{B}$ и $\vec{k}$.

Причина в том, что поляризованный свет впервые был получен при отражении света, падающего на границу сред под углом Брюстера. Плоскостью поляризации отраженного света первоначально называли плоскость падения света.

Сегодня плоскость поляризации связана с вектором $\vec{E}$, так как на среду действует именно вектор $\vec{E}$, а не вектор $\vec{B}$.

<u>Факультатив. Механизм поглощения света.</u>

Поглощение — это результат интерференции света, проходящего мимо поглощающих атомов, и света, излученного диполями атомов. Излучающие диполи раскачаны светом падающей волны. Если в результате интерференции получается излучение с меньшей амплитудой, то это и есть поглощение света.

Показатель преломления и замедление света в среде — это тоже результат интерференции света, проходящего мимо атомов, и света, излученного диполями атомов. Если в результате интерференции получается волна с отстающей фазой относительно волны проходящей мимо атомов, то свет распространяется с фазовой скоростью, которая меньше скорости света в вакууме.

Ячейка Керра. Быстрое переключение фазы на π. На выходе из ячейки с поглощением в 4 раза наблюдается короткий импульс увеличения интенсивности до 2.25 от падающей на ячейку интенсивности света.

Импульс предвестник.

<u>Экзамен. Пленочный поляризатор или поляроид.</u>

Типичные параметры поляроидной пленки: толщина меньше миллиметра, поглощение одной линейной поляризации 99.9% по энергии, поглощение второй линейной поляризации около 30%.

Осью поляроида называют направление вектора $\vec{E}$ прошедшей волны.

Изготовление поляроида:

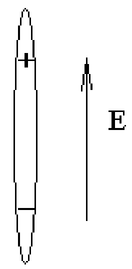
В прозрачный полимерный материал (целлулоид) добавляют вещество с оптическим дихроизмом (герапатит).

Дихроизм — различное поглощение света для двух ортогональных поляризаций.

Двулучепреломление — различные показатели преломления для двух ортогональных поляризаций.

Кристаллы герапатита имеют форму пластинок. Пластинки выстраивают в жидком целлулоиде внешним постоянным электрическим полем.

Применяются также иодно-поливиниловые плёнки. Полимерные молекулы выстраивают, вытягивая пленку в одном направлении.



Пусть на пленку падает линейно поляризованный свет, в котором вектор $\vec{E}$ направлен вдоль молекул полимера. Под действием электрического поля световой волны заряды внутри молекулы заметно смещаются вдоль вытянутой молекулы. Если же поляризация света перпендикулярна молекулам полимера, то заряды мало смещаются внутри каждой молекулы.

Когда свет сильно смещает заряды, в молекуле возникает большой наведенный светом осциллирующий на частоте света электрический дипольный момент.

Этот дипольный момент излучает, его излучение интерферирует с проходящим мимо светом. В результате интерференции уменьшается амплитуда прошедшего света. Это и есть поглощение света.

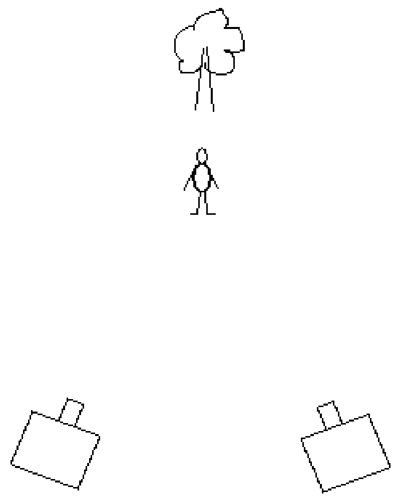
Следовательно, поляризация света, направленная вдоль вытянутых молекул полимера, сильно поглощается. Ортогональная к ней поляризация света поглощается слабо.

Ось поляроида направлена перпендикулярно направлению вытягивания полимерной пленки. Ось поляроида — это направление вектора $\vec{E}$ прошедшего света.

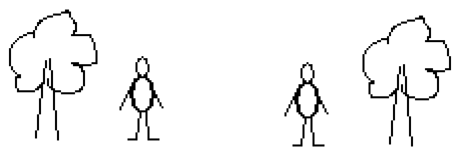
Экзамен. Поляроидные очки для стереокино.

Пусть мы собираемся фотографировать человека, стоящего перед деревом.

Сделаем снимок двумя фотоаппаратами одновременно из двух точек, разнесенных по горизонтали.



На снимке левого фотоаппарата человек будет справа, а дерево — слева. На втором снимке — наоборот.



Положим два снимка рядом и будем смотреть на них так, чтобы левым глазом видеть только снимок, снятый левым фотоаппаратом, а правым глазом — снимок снятый правым фотоаппаратом. Тогда, чтобы увидеть двумя глазами человека, глаза нужно будет свести ближе к переносице, а чтобы увидеть дерево, глаза нужно будет развести дальше от переносицы.

В результате человек будет казаться расположенным ближе, а дерево — дальше.

На этом принципе может быть создано стереоизображение на киноэкране.

Стереофильм (3D) снимают одновременно двумя разнесенными кинокамерами. Чтобы усилить стереоэффект расстояние между кинокамерами намеренно делают больше, чем расстояние между двумя глазами одного человека.

Две проявленные кинопленки одновременно демонстрируют на одном и том же киноэкране двумя проекторами. Свет от каждого проектора пропускают через поляроид. Оси поляроидов скрещены, то есть, направлены под прямым углом друг относительно друга.

Зрители смотрят на экран через очки, стекла которых заменены точно такими же скрещенными поляроидами.

В результате каждый глаз видит изображение снятое соответствующей камерой, что и создает стереоэффект.

<u>**Экзамен. Циркулярно поляризованный свет или свет круговой поляризации.**</u>

Свет поляризован по кругу, если в каждой точке пространства вектор $\vec{E}$ вращается вокруг луча.

Факультативная вставка.

В разных учебниках по оптике один и тот же свет называют то светом левой, то светом правой круговой поляризации. Если для вас важно, какую из двух круговых поляризаций называть левой, то вы должны сами дать определение левой и правой круговой поляризации.

В учебнике Бутикова и в монографии Борна и Вольфа дано следующее определение света левой круговой поляризации. Если вы смотрите навстречу лучу и конец вектора $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки, то вы видите свет левой круговой поляризации.

Логика такого определения состоит в том, что если вы смотрите на вращающийся электрический диполь, то диполь, вращающийся налево, излучает в вашем направлении свет левой круговой поляризации.

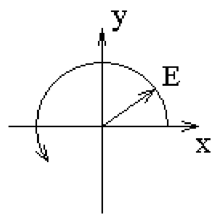
Заметим, что в таком случае направление вращения вектора $\vec{E}$ образует правый винт с направлением света. По этой причине в курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица такой свет называют светом правой круговой поляризации.

Примем определение левой круговой поляризации в соответствии с учебником Бутикова и монографией Борна и Вольфа.

Конец факультативной вставки.

Рассмотрим свет, который распространяется вдоль оси z, тогда $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z$.

Ось z направлена на нас, и для левой круговой поляризации вектор $\vec{E}$ вращается налево, против часовой стрелки.



Тогда в фиксированной пространственной точке электрическое поле имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_y = E_0 \cdot \sin(\omega t) = E_0 \cdot \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Круговая поляризация — это сумма двух линейных поляризаций со сдвигом фаз $\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда в комплексном представлении плоская световая волна левой круговой поляризации имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{E}_x = E_0 \cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} \\ \tilde{E}_y = E_0 \cdot e^{i\left(kz-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_0\right)} \end{cases}, \text{ где } kz = \left(\vec{k}, \vec{r}\right), \text{ так как } \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{e}_z.$$

Объединим две комплексных проекции вектора $\vec{E}$ в один комплексный вектор и получим:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_x \vec{e}_x + \tilde{E}_y \vec{e}_y = E_0 \vec{e}_x e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} + E_0 \vec{e}_y e^{i\left(kz-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_0\right)} =$$

$$= E_0 \vec{e}_x e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} + E_0 \vec{e}_y e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)} = E_0 \left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right) \cdot e^{i\left(kz-\omega t+\varphi_0\right)}.$$

Здесь удобно ввести единичный вектор круговой поляризации. Вектор $\left(\vec{e}_x + i\vec{e}_y\right)$ не вполне для этого подходит, так как его длина не равна единице.