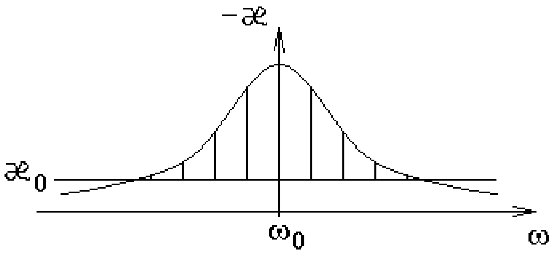
Экзамен. Пленка Троицкого. Селекция лазерных мод.

Обычно внутри частотного контура усиления лазерной среды при условии усиления больше потерь $(-\aleph) > \aleph_0$ помещается несколько продольных мод с интервалом $\Delta\nu = \dfrac{c}{2nL}$.



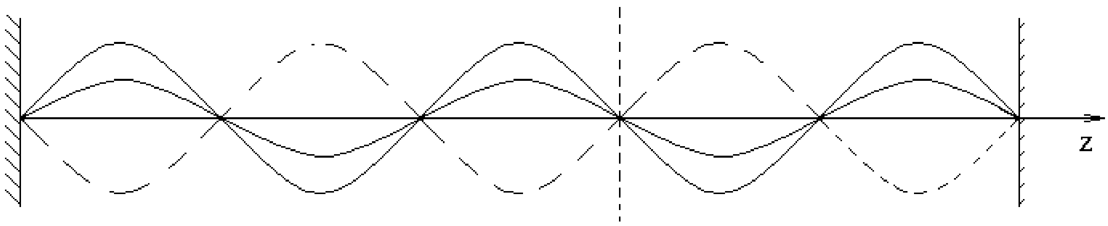
Чтобы получить одночастотный режим генерации лазера нужно подавить генерацию на лишних продольных модах. Эту задачу селекции продольных мод можно решить с помощью пленки Троицкого.

Пленки Троицкого бывают двух типов: с металлическим напылением (поглощающая) и с диэлектрическим узором (рассеивающая).

Толщина пленки Троицкого должна быть гораздо меньше половины длины волны.

Пленку Троицкого помещают внутрь резонатора лазера перпендикулярно лучу.

Если пленка Троицкого находится в узле стоячей волны поля $\vec{E}$, то пленка не поглощает и не рассеивает свет.



пленка Троицкого

Если же пленка Троицкого находится в пучности стоячей лазерной волны, то она поглощает или рассеивает свет и вносит дополнительные потери в соответствующую продольную моду.

Генерация остается только для тех продольных мод, для которых пленка находится в узле стоячей волны.

Рассмотрим теперь селекцию поперечных лазерных мод.

Селекция поперечных мод обычно осуществляется внутрирезонаторной ирисовой диафрагмой.

Ирисовая диафрагма — отверстие в непрозрачном экране, диаметр которого можно изменять. Конструктивно ирисовая диафрагма состоит из нескольких металлических лепестков. Ирис — цветок.

Диафрагму ставят симметрично относительно оси резонатора. Моды с большими поперечными индексами имеют световое поле, которое частично занимает объем достаточно далеко расположенный от оси резонатора. Диаметр диафрагмы можно подобрать так, чтобы из всех поперечных мод генерация осталась только на низшей моде с индексами (0,0) или, как говорят, только на продольной моде.

Экзамен. Закон преломления (закон Снеллиуса) и закон отражения света.

Закон Снеллиуса можно доказать с помощью построений Гюйгенса. Мы сделаем это при рассмотрении кристаллооптики, а сейчас докажем его иначе.

При преломлении света длина волны изменяется, а частота — нет. Если бы частота света изменялась, то на границу раздела падали бы волны с одной частотой, а уходили — с другой, что невозможно.

Рассмотрим плоскую световую волну, которая падает на плоскую границу двух сред. Плоские условия задачи означают плоские решения. Тогда отраженная и преломленная волны тоже будут плоскими.

Введем обозначения для волн:

i — падающая волна (incident — падающий),

r — отраженная волна (reflect — отражать),

t — преломленная волна (transpierce [trens'pies]— пронзать насквозь).

На границе раздела двух сред должны выполняться граничные условия для электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ полей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

для границы раздела принимают следующий вид

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c}i \end{cases}.$$

Для прозрачных сред $\begin{cases} \sigma = 0 \\ i = 0 \\ D = \varepsilon E \\ B = \mu H \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}$.

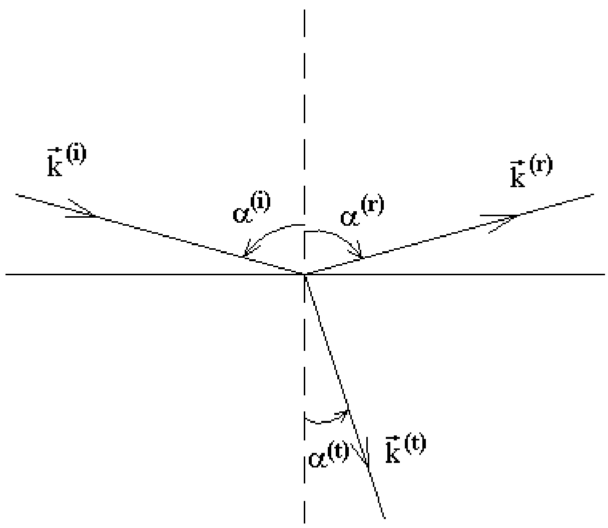
Выберем направление оси z перпендикулярно границе раздела двух сред.

Рассмотрим тангенциальную составляющую электрического поля — составляющую, направленную вдоль границы раздела двух сред. Рассмотрим световое поле на границе раздела сред в один момент времени, тогда k_x и k_y — циклические пространственные частоты горизонтальной составляющей электрического поля. Зависимость этой составляющей от x-координаты — синусоида для каждой из трех волн на границе раздела сред, а сумма трех синусоид может дать ноль, только если их пространственные частоты одинаковы. Следовательно, величина k_x имеет одинаковое значение для падающей, отраженной и преломленной волн. Аналогично, равны друг другу пространственные частоты k_y.

Условие одинаковых пространственных частот трех волн на границе раздела примет вид:

$\begin{cases} k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)} \\ k_y^{(i)} = k_y^{(r)} = k_y^{(t)} \end{cases}$, где i, r, t — индексы для падающей, отраженной и преломленной волн.

Выберем направление оси y перпендикулярно плоскости падения света так, чтобы для падающей волны $k_y^{(i)} = 0$, тогда $k_y^{(r)} = k_y^{(t)} = 0$. Следовательно, все три луча и нормаль к границе раздела лежат в плоскости падения x, z.



Углом падения света называют угол $\alpha^{(i)}$ между нормалью к границе раздела сред и направлением падающего луча $\vec{k}^{(i)}$. Угол отражения $\alpha^{(r)}$ — угол между нормалью и отраженным лучом $\vec{k}^{(r)}$, угол преломления $\alpha^{(t)}$ — угол между нормалью и преломленным лучом $\vec{k}^{(t)}$.

Тогда для каждой из трех волн справедливо равенство $k_x = k \cdot \sin(\alpha)$.

Подставим это в равенство пространственных частот $k_x^{(i)} = k_x^{(r)} = k_x^{(t)}$ и получим:

$$k^{(i)}\sin\left(\alpha^{(i)}\right)=k^{(r)}\sin\left(\alpha^{(r)}\right)=k^{(t)}\sin\left(\alpha^{(t)}\right)$$

Из двух выражений для фазовой скорости $V_{ф}=\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{c}{n}$ получаем, что $k=n\dfrac{\omega}{c}$. Подставим это выражение для волнового числа k в предыдущую формулу с синусами

$\dfrac{n_1\omega}{c}\sin\left(\alpha^{(i)}\right)=\dfrac{n_1\omega}{c}\sin\left(\alpha^{(r)}\right)=\dfrac{n_2\omega}{c}\sin\left(\alpha^{(t)}\right)$, где n_1 и n_2 — показатели преломления двух сред.

Сократим формулу на отношение $\dfrac{\omega}{c}$ и получим

$$n_1\cdot\sin\left(\alpha^{(i)}\right)=n_1\cdot\sin\left(\alpha^{(r)}\right)=n_2\cdot\sin\left(\alpha^{(t)}\right).$$

С учетом неравенства $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha^{(r)}\le\dfrac{\pi}{2}$, означающего, что отраженный свет остается выше границы раздела сред, получим

$\underline{\alpha^{(i)}=\alpha^{(r)}}$ — угол падения равен углу отражения или закон отражения.

Обозначим $\alpha_1\equiv\alpha^{(i)}$ и $\alpha_2\equiv\alpha^{(t)}$ и получим закон преломления или закон Снеллиуса:

$$\underline{n_1\sin\left(\alpha_1\right)=n_2\sin\left(\alpha_2\right).}$$

Заметим, что если параллельных границ между разными средами много, то

$\underline{n\cdot\sin\left(\alpha\right)=const}$ для всех границ.

Экзамен. Формулы Френеля. Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания.

Найдем амплитуды отраженной и преломленной волн из граничных условий

$$\begin{cases}\varepsilon_1 E_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n}\\ E_{1\tau}=E_{2\tau}\\ B_{1n}=B_{2n}\\ H_{1\tau}=H_{2\tau}\end{cases}$$

с учетом поперечности световых волн

$$\begin{cases}\vec{E}\perp\vec{k}\\ \vec{B}\perp\vec{k}\\ \vec{E}\perp\vec{B}\end{cases},$$

соотношения напряженностей электрического и магнитного полей $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ и с учетом законов отражения и преломления.

Те же граничные условия должны выполняться и для комплексных величин, тогда

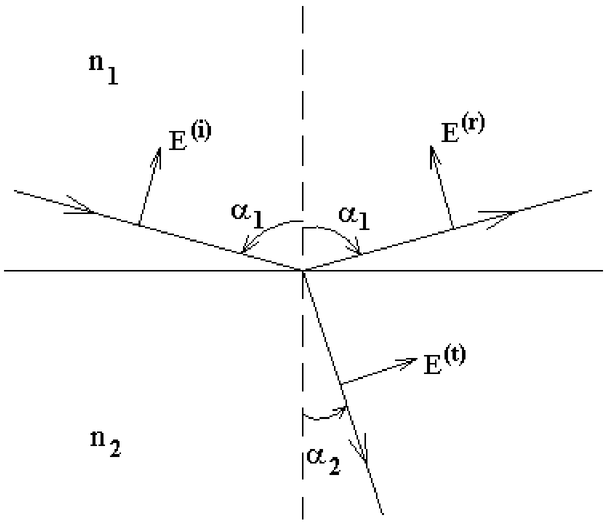
$$\begin{cases} \varepsilon_1 \tilde{E}_{1n} = \varepsilon_2 \tilde{E}_{2n} \\ \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{B}_{1n} = \tilde{B}_{2n} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \end{cases}$$ — граничные условия в комплексном виде.

Нам будет достаточно уравнений $\begin{cases} \tilde{E}_{1\tau} = \tilde{E}_{2\tau} \\ \tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau} \end{cases}$.

Далее удобно рассмотреть раздельно вариант поляризации света в плоскости падения || и вариант поляризации перпендикулярной плоскости падения $\perp$.

I). Поляризация || параллельная плоскости падения света.

Выберем положительные направления для векторов $\tilde{\vec{E}}$ в падающей, отраженной и преломленной волнах:



Положительные направления электрического поля трех волн выбраны так, чтобы положительные направления магнитного поля этих волн совпадали друг с другом.

Магнитное поле каждой из трех волн направлено по касательной к границе раздела сред, поэтому для магнитного поля можно воспользоваться только граничным условием для тангенциальной составляющей: $\tilde{H}_{1\tau} = \tilde{H}_{2\tau}$. Над границей есть магнитное поле падающей и отраженной волн, под границей — только прошедшей волны, тогда

$$\tilde{H}^{(i)} + \tilde{H}^{(r)} = \tilde{H}^{(t)}.$$

С учетом соотношения $\sqrt{\varepsilon}\tilde{E}=\sqrt{\mu}\tilde{H}$, получим $\tilde{H}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\tilde{E}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{\mu^2}}\tilde{E}=\dfrac{n}{\mu}\tilde{E}$.
Тогда для комплексных амплитуд электрических полей получим:

$$\frac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(i)}+\frac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(r)}=\frac{n_2}{\mu_2}\tilde{E}^{(t)}.$$

Граничное условие для нормальной составляющей поля электрического поля

$$\varepsilon_1\tilde{E}_{1n}=\varepsilon_2\tilde{E}_{2n}$$

после некоторых преобразований приводит к тому же уравнению для комплексных амплитуд отраженной $\tilde{E}^{(r)}$ и прошедшей волн $\tilde{E}^{(t)}$, поэтому мы его рассматривать не будем.

Рассмотрим в качестве второго уравнения для неизвестных амплитуд $\tilde{E}^{(r)}$ и $\tilde{E}^{(t)}$ граничное условие для тангенциальной составляющей электрического поля $\tilde{E}_{1\tau}=\tilde{E}_{2\tau}$, где проекция поля на горизонтальное направление в плоскости рисунка получается умножением напряженности поля на косинус соответствующего угла для каждой из трех волн:

$$\tilde{E}^{(i)}\cos\left(\alpha_1\right)-\tilde{E}^{(r)}\cos\left(\alpha_1\right)=\tilde{E}^{(t)}\cos\left(\alpha_2\right).$$

Решая два уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(i)}+\dfrac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(r)}=\dfrac{n_2}{\mu_2}\tilde{E}^{(t)}\\ \tilde{E}^{(i)}\cos\left(\alpha_1\right)-\tilde{E}^{(r)}\cos\left(\alpha_1\right)=\tilde{E}^{(t)}\cos\left(\alpha_2\right)\end{cases}$$

с двумя неизвестными $\tilde{E}^{(r)}$ и $\tilde{E}^{(t)}$, находим

$$\begin{cases}\tilde{E}_{\parallel}^{(r)}=\tilde{E}_{\parallel}^{(i)}\cdot\dfrac{\dfrac{n_2}{\mu_2}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)-\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_2\right)}{\dfrac{n_2}{\mu_2}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)+\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_2\right)}\\ \tilde{E}_{\parallel}^{(t)}=\tilde{E}_{\parallel}^{(i)}\cdot\dfrac{2\cdot\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)}{\dfrac{n_2}{\mu_2}\cdot\cos\left(\alpha_1\right)+\dfrac{n_1}{\mu_1}\cdot\cos\left(\alpha_2\right)}\end{cases}$$

— формулы Френеля для амплитуд прошедшей и преломленной волн.

Здесь значок $\|$ у поля E означает, что волна поляризована параллельно плоскости падения света.

Обычно в этих выражениях пренебрегают отличием магнитной проницаемости среды от единицы ($\mu=1$). Тогда окончательно для амплитудных коэффициентов отражения $r \equiv \dfrac{\tilde{E}^{(r)}}{\tilde{E}^{(i)}}$ и пропускания $\tau \equiv \dfrac{\tilde{E}^{(t)}}{\tilde{E}^{(i)}}$ получаем следующие выражения

$$\begin{cases} r_{\|} = \dfrac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} \\ \tau_{\|} = \dfrac{2n_1 \cos(\alpha_1)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} \end{cases}$$ — это формулы Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания для поляризации света в плоскости падения.

Преобразуем $r_{\|}$ к другому виду. Для этого сначала умножим разные слагаемые числителя и знаменателя на разные части равенства $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ так, чтобы каждое слагаемое содержало произведение $n_1 n_2$ и получим:

$$r_{\|} = \frac{n_2 \cos(\alpha_1) - n_1 \cos(\alpha_2)}{n_2 \cos(\alpha_1) + n_1 \cos(\alpha_2)} = \frac{n_1 n_2 \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) - n_1 n_2 \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)}{n_1 n_2 \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) + n_1 n_2 \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2\alpha_1) - \frac{1}{2}\sin(2\alpha_2)}{\frac{1}{2}\sin(2\alpha_1) + \frac{1}{2}\sin(2\alpha_2)} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

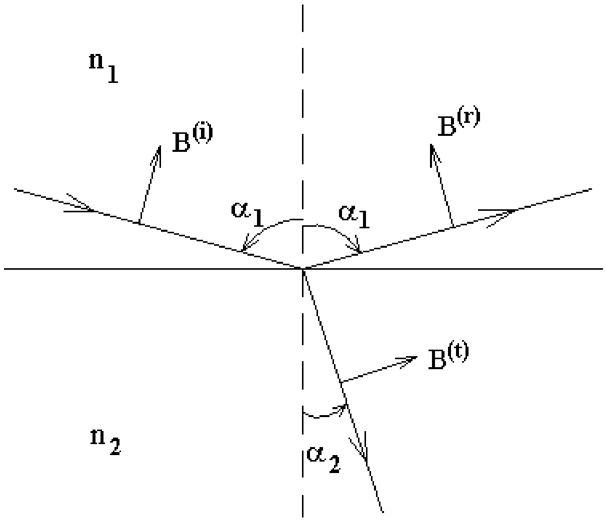
Окончательно:

$$r_{\|} = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Эта формула понадобиться нам в дальнейшем. Заметим, что она получена в приближении $\mu = 1$.

II). Поляризация $\perp$ плоскости падения света.

Выберем положительные направления для векторов $\vec{B}$ трех световых волн так, чтобы положительные направления векторов $\vec{E}$ этих волн совпали.



.

Для поляризации света перпендикулярной плоскости падения воспользуемся теми же граничными условиями $\begin{cases} \tilde{E}_{\tau 1} = \tilde{E}_{\tau 2} \\ \tilde{H}_{\tau 1} = \tilde{H}_{\tau 2} \end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases} \tilde{E}^{(i)} + \tilde{E}^{(r)} = \tilde{E}^{(t)} \\ \tilde{H}^{(i)} \cos\left(\alpha_1\right) - \tilde{H}^{(r)} \cos\left(\alpha_1\right) = \tilde{H}^{(t)} \cos\left(\alpha_2\right) \end{cases}$$

С учетом соотношения $\sqrt{\varepsilon}\tilde{E} = \sqrt{\mu}\tilde{H}$, получим $\tilde{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\tilde{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\mu^2}}\tilde{E} = \frac{n}{\mu}\tilde{E}$.

Подставим это во второе уравнение системы и получим пару уравнений для амплитуд отраженной и преломленной волн:

$$\begin{cases} \tilde{E}^{(i)} + \tilde{E}^{(r)} = \tilde{E}^{(t)} \\ \frac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(i)} \cos\left(\alpha_1\right) - \frac{n_1}{\mu_1}\tilde{E}^{(r)} \cos\left(\alpha_1\right) = \frac{n_2}{\mu_2}\tilde{E}^{(t)} \cos\left(\alpha_2\right) \end{cases}.$$

Решая уравнения, находим формулы Френеля для амплитуды отраженной и преломленной световых волн для поляризации света, перпендикулярной плоскости падения света:

$$\begin{cases} \tilde{E}_{\perp}^{(r)} = \tilde{E}_{\perp}^{(i)} \cdot \dfrac{\dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_1\right) - \dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos\left(\alpha_2\right)}{\dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_1\right) + \dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos\left(\alpha_2\right)} \\ \tilde{E}_{\perp}^{(t)} = \tilde{E}_{\perp}^{(i)} \cdot \dfrac{2 \cdot \dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_1\right)}{\dfrac{n_1}{\mu_1} \cdot \cos\left(\alpha_1\right) + \dfrac{n_2}{\mu_2} \cdot \cos\left(\alpha_2\right)} \end{cases}$$

и, заменяя μ на единицу, как это обычно делают в учебниках по оптике, получаем для амплитудных коэффициентов отражения $r_\perp \equiv \frac{\tilde{E}_\perp^{(r)}}{\tilde{E}_\perp^{(i)}}$ и пропускания $\tau_\perp \equiv \frac{\tilde{E}_\perp^{(t)}}{\tilde{E}_\perp^{(i)}}$ формулы Френеля для поляризации света перпендикулярной плоскости падения света:

$$\begin{cases} r_\perp = \dfrac{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) - n_2 \cdot \cos(\alpha_2)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) + n_2 \cdot \cos(\alpha_2)} \\ \tau_\perp = \dfrac{2n_1 \cdot \cos(\alpha_1)}{n_1 \cdot \cos(\alpha_1) + n_2 \cdot \cos(\alpha_2)} \end{cases}.$$

Экзамен. Угол Брюстера и брюстеровские окна лазерных трубок.

Рассмотрим условие $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, где α_1 — угол падения света на границу раздела двух сред, α_2 — угол преломления.

Если $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, то $tg(\alpha_1 + \alpha_2) = \infty$. Подставим это значение в выражение $r_\parallel = \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)}$ и получим

$$r_\parallel = 0.$$