Кристаллооптика.

Экзамен. Направление векторов $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{k}, \vec{S}$ для плоской световой волны в кристалле.

Мы знаем, что волновые уравнения имеют решения в виде плоских монохроматических волн. В комплексном представлении эти волны имеют вид: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{E}_0 \vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$ и $\tilde{\vec{B}} = \tilde{B}_0 \vec{e}\,'_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}$. Вещественные поля представляют собой вещественную часть этих комплексных выражений. Далее будем рассматривать вещественные плоские волны. Это рассмотрение полностью повторяет собой доказательство поперечности световых волн в прозрачной изотропной среде, только теперь придется различать направления векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

Оба поля зависят от координат и времени только через их комбинацию в виде $\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)$. Обозначим эту комбинацию буквой $\varphi = \left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

φ — это фаза волны без учета начальной фазы, которая может оказаться различной для различных проекций векторов $\vec{E}(\varphi)$ и $\vec{B}(\varphi)$.

Рассмотрим производную по времени, например, от вектора $\vec{E}(\varphi)$:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial t} = -\omega\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}.$$

Что в операторном виде можно записать, как:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial t} = -\omega\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Рассмотрим производную от вектора $\vec{E}(\varphi)$ по x координате:

$$\frac{\partial \vec{E}(\varphi)}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}{\partial x} =$$

$$= \frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{\partial\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} = k_x\cdot\frac{d\vec{E}(\varphi)}{d\varphi}$$

Тогда для вещественной плоской монохроматической волны:

$$\frac{\partial\,\cdot}{\partial x} = k_x\frac{d\,\cdot}{d\varphi}.$$

Тогда

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_x k_x\frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_y k_y\frac{d}{d\varphi} + \vec{e}_z k_z\frac{d}{d\varphi} = \vec{k}\frac{d}{d\varphi}.$$

Подставим эти соотношения в 4-е уравнения Максвелла $\begin{cases} \left(\vec{\nabla},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \left(\vec{\nabla},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]=\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$, где для прозрачной среды учтено $\begin{cases} \rho=0 \\ \vec{j}=0 \end{cases}$.

В анизотропной среде диэлектрическая проницаемость ε — это тензор второго ранга, поэтому в отличие от изотропной среды теперь нужно различать направление векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$.

$$\begin{cases} \left(\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{E}\right]=\dfrac{\omega}{c}\dfrac{d}{d\varphi}\vec{B} \\ \left(\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k}\dfrac{d}{d\varphi},\vec{H}\right]=-\dfrac{\omega}{c}\dfrac{d}{d\varphi}\vec{D} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \dfrac{d}{d\varphi}\left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{\omega}{c}\vec{B}\right) \\ \dfrac{d}{d\varphi}\left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \dfrac{d}{d\varphi}\left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{\omega}{c}\vec{D}\right) \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=const \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{\omega}{c}\vec{B}+const \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=const \\ \left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\dfrac{\omega}{c}\vec{D}+const \end{cases},$$

где $const$ — константы, независящие от φ. То есть константа не зависит ни от времени, ни от координат, так как вся зависимость электрического и магнитного полей от времени и координат есть только через зависимость от $\varphi=\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t$.

Нас интересуют электромагнитные поля на оптических частотах, а не постоянные поля, поэтому константы в правых частях равенств равны нулю. И действительно. Перенесем все слагаемые кроме константы в левую часть каждого равенства. Через половину периода световой волны левая часть равенства поменяет знак, а правая часть останется той же константой. Это возможно только в том случае, если константа равна нулю.

Тогда

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{\omega}{c}\vec{B} \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{H}\right]=-\dfrac{\omega}{c}\vec{D} \end{cases}.$$

Добавим сюда уравнение $\vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ и заменим везде вектор $\vec{H}$ на вектор $\vec{B}$, так как $\vec{B}=\mu\vec{H}$, а в оптике $\mu=1$. В результате получим пять соотношений:

$$\begin{cases} \left(\vec{k},\vec{D}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{E}\right]=\dfrac{\omega}{c}\vec{B} \\ \left(\vec{k},\vec{B}\right)=0 \\ \left[\vec{k},\vec{B}\right]=-\dfrac{\omega}{c}\vec{D} \\ \vec{S}=\dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right] \end{cases} \qquad => \qquad \begin{cases} \vec{k}\perp\vec{D} \\ \vec{B}\perp\vec{E} \\ \vec{B}\perp\vec{k} \\ \vec{B}\perp\vec{D} \\ \vec{S}\perp\vec{E} \\ \vec{S}\perp\vec{B} \end{cases}.$$

Заметим, что из ортогональности векторов с вещественными координатами следует ортогональность тех же векторов с комплексными координатами.

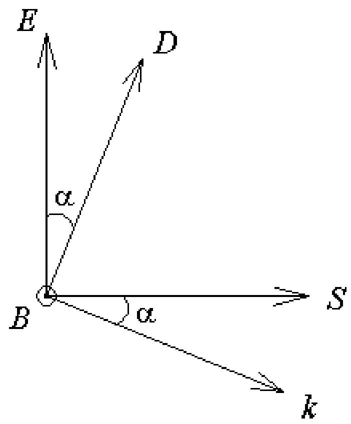
Из полученных соотношений ортогональности видно, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен 4-м остальным векторам $\vec{k},\vec{D},\vec{E},\vec{S}$. Следовательно, эти 4-е вектора лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$.

Сгруппируем соотношения ортогональности по три:

$$\begin{cases} \vec{k}\perp\vec{D} \\ \vec{k}\perp\vec{B} \\ \vec{B}\perp\vec{D} \end{cases} \qquad => \qquad \text{векторы } \vec{k},\vec{D},\vec{B} \text{ взаимно ортогональны,}$$

$$\begin{cases} \vec{S}\perp\vec{E} \\ \vec{S}\perp\vec{B} \\ \vec{E}\perp\vec{B} \end{cases} \qquad => \qquad \text{векторы } \vec{S},\vec{E},\vec{B} \text{ взаимно ортогональны.}$$

Рассмотрим рисунок, на котором вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка, тогда остальные 4-е вектора окажутся в плоскости рисунка:



Из $\begin{cases} \vec{E} \perp \vec{S} \\ \vec{D} \perp \vec{k} \end{cases}$ следует, что угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$ равен углу между векторами $\vec{S}$ и $\vec{k}$. Обозначим этот угол за α:

$$\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{D},\vec{E}}\right) = \left(\widehat{\vec{S},\vec{k}}\right) \tag{7.1}$$

Напомним, почему в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ различаются по направлению.

В кристалле $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. $\hat{\varepsilon}$ — симметричный тензор второго ранга. В тензорной алгебре есть теорема о том, что симметричный тензор второго ранга поворотом системы координат можно привести к диагональному виду:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \cdot \vec{E}.$$

Если тензор диэлектрической проницаемости диагонален, то оси координат x, y, z — совпадают с главными диэлектрическими осями кристалла по определению главных диэлектрических осей.

Умножение вектора $\vec{E}$ слева на диагональный тензор $\hat{\varepsilon}$ означает разное растяжение по осям x, y, z, растяжение в $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ раз соответственно. Растяжение по осям различно, поэтому вектор произведения $\vec{D}$ и отличается по направлению от вектора $\vec{E}$ на некоторый угол $\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{E},\vec{D}}\right)$, что можно рассматривать, как некоторый поворот (и растяжение) от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D}$ при умножении на матрицу $\hat{\varepsilon}$.

Раньше мы выяснили, что в кристалле векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ должны быть ортогональны вектору $\vec{B}$ в плоской световой волне в анизотропной среде. Что будет, если рассматриваемый поворот от вектора $\vec{E}$ к вектору $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$ выведет вектор $\vec{D}$ из плоскости перпендикулярной вектору $\vec{B}$?

Если условие ортогональности $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E} \perp \vec{B}$ не выполнено, то такое направление вектора $\vec{E}$ невозможно в бегущей в кристалле плоской световой волне. Оказывается (без доказательства), что в этом случае, падающая на кристалл плоская световая волна распадается на две бегущие волны с разными разрешенными в кристалле направлениями поляризации (направлениями вектора $\vec{E}$). Для каждой из этих двух волн условие $\hat{\varepsilon}\vec{E} \perp \vec{B}$ будет выполнено.

Эти две волны распространяются в кристалле независимо друг от друга и несколько в различающихся направлениях. Это явление расщепления падающей на кристалл плоской волны на две волны называется двулучепреломлением, и связано с тем, что показатели преломления кристалла для этих поляризаций различаются по величине.