

### Экзамен. Фокальная плоскость линзы. Фокус. Фокусное расстояние.

Фокальная плоскость линзы — плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости.

Фокус — точка пересечения фокальной плоскости с оптической осью.

Фокусное расстояние — координата фокуса относительно линзы.

Передняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной плоскости изображения. Пусть переднее фокусное расстояние равно  $f_1$ . Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} + \frac{n_2}{+\infty} \Rightarrow \Phi = -\frac{n_1}{f_1}.$$

Рассмотрим теперь фокусное расстояние за линзой или заднее фокусное расстояние  $f_2$ . Задняя фокальная плоскость — это плоскость, сопряженная к бесконечно удаленной предметной плоскости. Тогда

$$\Phi = -\frac{n_1}{-\infty} + \frac{n_2}{f_2} \Rightarrow \Phi = \frac{n_2}{f_2}.$$

Объединяя формулу тонкой линзы и две формулы для фокусных расстояний, получим:

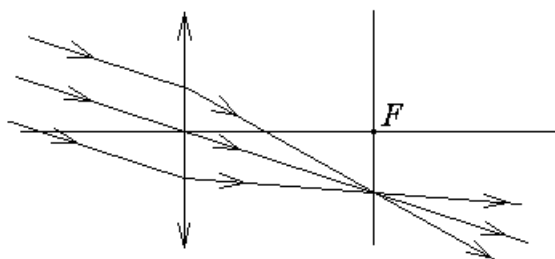
$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} \Rightarrow$$

$$-\frac{n_1}{f_1} = -\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2}{f_2} \text{ — это тоже формулы тонкой линзы.}$$

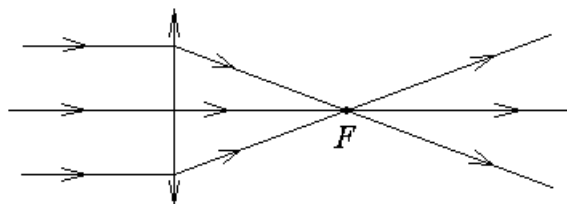
-----  
Точечный источник света излучает сферическую волну, поэтому радиус фронта волны в точке наблюдения равен расстоянию до источника света. Если источник расположен очень далеко, то радиус фронта волны очень большой, и волна почти плоская. Плоской световой волне соответствует параллельный пучок лучей.

Рассмотрим падающий на линзу параллельный пучок лучей. Можно считать, что этот пучок лучей выходит из точечного источника, расположенного бесконечно далеко слева от линзы. Сопряженная бесконечно удаленному источнику плоскость совпадает с фокальной плоскостью линзы по определению фокальной плоскости.

Следовательно, параллельный пучок лучей линза собирает в одну точку в фокальной плоскости.



Пучок лучей параллельный оптической оси в соответствии с осевой симметрией задачи собирается в фокусе линзы.

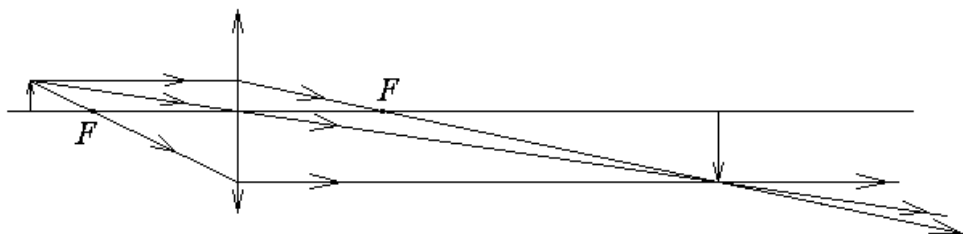


### Экзамен. Построение изображений в тонкой линзе. Действительное и мнимое изображение.

Изображение действительное, если оно расположено за линзой. Изображение мнимое, если лучи за линзой не пересекаются, а пересекаются лишь их продолжения в область перед линзой.

В соответствии с этим если в плоскость действительного изображения поместить экран, то на экране будет видно изображение, если же экран поместить в плоскость мнимого изображения, то на экране изображения не будет.

Пример построения действительного изображения приведен на рисунке приведенном ниже:



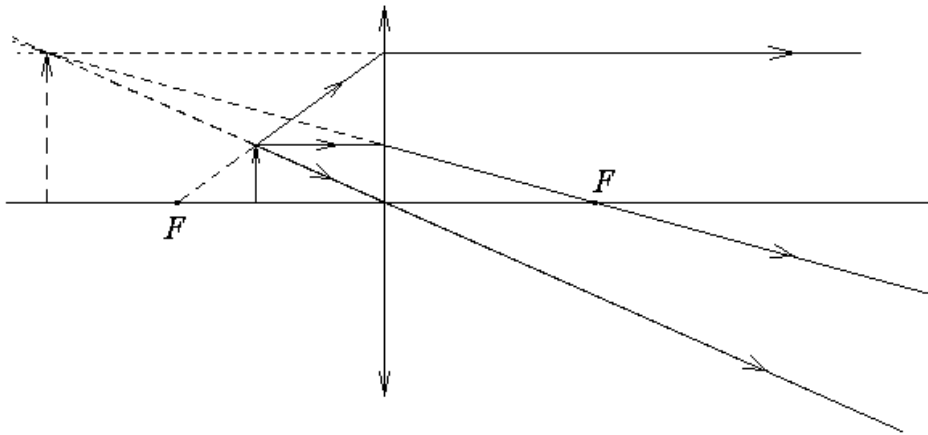
Для построения изображения точечного источника в тонкой линзе достаточно найти пересечение двух любых лучей, выходящих из точечного источника. Для этой цели есть три удобных луча.

1-ый луч — это луч, который до линзы идет параллельно оптической оси. После линзы этот луч проходит через задний фокус линзы.

2-ой луч до линзы проходит через передний фокус. После линзы этот луч проходит параллельно оптической оси.

3-ий луч проходит через центр тонкой линзы. После линзы этот луч проходит без изменения направления, если показатель преломления среды до и после линзы один и тот же. Дело в том, что центральная часть тонкой линзы похожа на плоскопараллельную пластинку, которая не изменяет направления проходящего через нее луча.

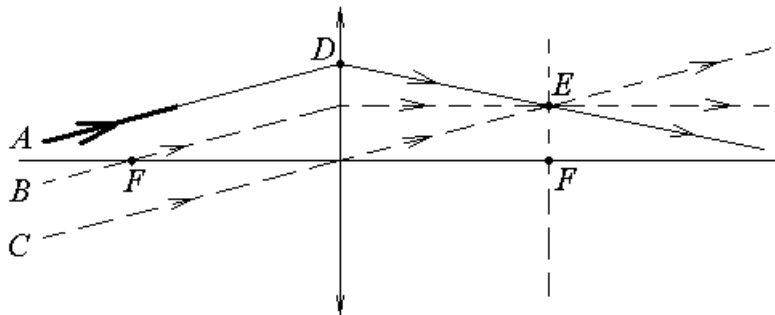
Пример построения мнимого изображения с теми же тремя лучами приведен на рисунке приведенном ниже:



### Экзамен. Построение хода произвольного луча при прохождении тонкой линзы.

При анализе оптической схемы часто возникает потребность понять ход конкретного луча, который не проходит ни через фокус линзы, ни через ее центр. Будем считать, что с обеих сторон тонкой линзы среда имеет одинаковый показатель преломления.

Пусть перед линзой произвольно задан луч  $A$ , и мы хотим построить ход именно этого луча после линзы.



Продлим луч  $A$  до линзы и получим на линзе точку  $D$ , через которую проходит луч  $A$ .

Для построения хода луча  $A$  за линзой достаточно найти еще хотя бы одну точку  $E$  за линзой, кроме точки  $D$ , через которую луч  $A$  обязан пройти. Через две точки  $D$  и  $E$  луч  $A$  пройдет за линзой единственным возможным образом.

Рассмотрим ход через линзу некоторых вспомогательных лучей, которые на самом деле могут отсутствовать.

Можно рассмотреть луч  $B$ , который проходит через передний фокус линзы и параллелен заданному лучу  $A$ , или рассмотреть луч  $C$  проходящий через центр линзы и тоже параллельный лучу  $A$ .

Лучи  $B$  и  $C$  легко построить за линзой. Луч  $B$ , проходящий через передний фокус линзы, после линзы пойдет параллельно оптической оси. Луч  $C$

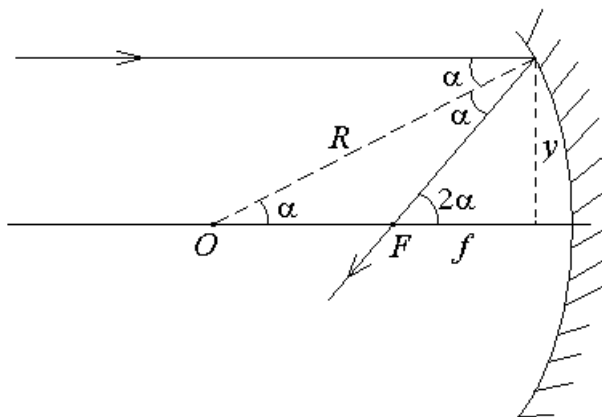
проходит через центр линзы без изменения направления. Найдем точку пересечения  $E$  любого из этих двух лучей ( $B$  или  $C$ ), прошедшего линзу, и задней фокальной плоскости линзы. Лучи  $A$ ,  $B$ ,  $C$  перед линзой параллельны друг другу, тогда после линзы они обязаны собраться в одной точке в фокальной плоскости. Следовательно, интересующий нас луч  $A$  обязан пройти точку пересечения  $E$  задней фокальной плоскости лучами  $B$  и  $C$ .

После линзы интересующий нас луч  $A$  проходит через точки  $D$  и  $E$ .

### Экзамен. Сферическое зеркало.

Для сферического зеркала, как и для тонкой линзы, можно ввести в рассмотрение сопряженные плоскости, фокус и оптическую силу. Мы не будем подробно повторять для сферического зеркала рассуждения подобные рассуждениям, проведенным для тонкой линзы.

Рассмотрим вогнутое сферическое зеркало. Рассмотрим луч, падающий на зеркало параллельно оптической оси. Отраженный луч пересекает оптическую ось в фокусе зеркала (точка  $F$  на рисунке).



На рисунке обозначены буквой  $\alpha$  три одинаковых угла, которые примыкают к отрезку, обозначенному на рисунке буквой  $R$ . Этот отрезок — перпендикуляр к поверхности зеркала в точке касания зеркала лучом. Два верхних угла равны друг другу, как угол падения и угол отражения от зеркальной поверхности.

Нормаль к сферической зеркальной поверхности пересекает оптическую ось в точке  $O$ , которая является центром сферической поверхности зеркала. Соответственно, расстояние от точки  $O$  до точки касания лучом зеркала равно радиусу зеркала  $R$ .

Верхний и нижний из трех углов  $\alpha$  равны друг другу, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых. Напомним, что по условию задачи луч падает на зеркало параллельно оптической оси.

Угол, обозначенный на рисунке как  $2\alpha$ , действительно равен сумме двух верхних углов  $\alpha$ , так как два верхних угла вместе образуют угол, который является внутренним накрест лежащим углом по отношению к углу  $2\alpha$  при параллельных прямых.

Точка касания лучом зеркала имеет  $y$  координату, величину которой можно выразить двумя способами. С одной стороны  $y = R \cdot \sin(\alpha) \approx R\alpha$ , с другой стороны  $y \approx f \cdot \operatorname{tg}(2\alpha) \approx f 2\alpha$ . Приравнявая два выражения для одной и той же величины  $y$ , находим, что  $f = \frac{R}{2}$  — фокусное расстояние сферического зеркала, где  $R$  — радиус кривизны зеркала. Для вогнутого зеркала по принятому нами правилу знаков обе величины отрицательные, так как и центр сферической поверхности зеркала, и фокус зеркала имеют отрицательную  $x$  координату относительно зеркала.

### **Экзамен. Матрица толстой линзы.**

Рассмотрим линзу, толщиной которой нельзя пренебречь по сравнению с радиусами кривизны линзы.

При получении матрицы толстой линзы кроме матриц двух сферических границ линзы нужно учитывать матрицу трансляции луча между сферическими границами. Тогда матрицу толстой линзы можно найти, как произведение трех соответствующих матриц в обратном порядке:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица второй сферической границы,  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  —

матрица трансляции,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица первой сферической границы.

Дважды перемножая матрицы по правилу "строка на столбец" получим

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{n}\Phi_1 & \frac{L}{n} \\ \frac{L}{n}\Phi_1\Phi_2 - \Phi_1 - \Phi_2 & 1 - \frac{L}{n}\Phi_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Phi_1 = \frac{n-1}{R_1}$ ,  $\Phi_2 = \frac{1-n}{R_2}$  — оптические силы двух сферических поверхностей в соответствии с определением оптической силы сферической границы  $\Phi \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}$ ,  $L$  — толщина линзы,  $n$  — показатель преломления линзы.

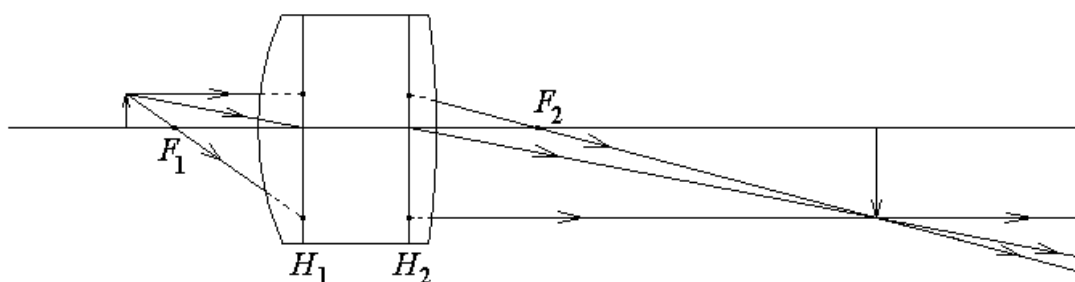
### **Экзамен. Главные плоскости централизованной оптической системы.**

Главные плоскости оптической системы — это по определению сопряженные плоскости с единичным коэффициентом увеличения  $\frac{y_2}{y_1} = 1$ .

Для тонкой линзы обе главные плоскости находятся в месте расположения тонкой линзы.

Главные плоскости позволяют построить ход лучей, не рассматривая преломления лучей на реальных сферических границах оптической системы. Для построения хода лучей достаточно знать так называемые кардинальные точки оптической системы — это четыре точки пересечения оптической оси с двумя фокальными плоскостями (фокусы) и двумя главными плоскостями (главные точки).

Оптическая система ведет себя так, как будто пространство между главными плоскостями отсутствует, а в месте разрыва установлена тонкая линза, фокусные расстояния которой совпадают с фокусными расстояниями рассматриваемой оптической системы (с расстояниями от главных оптических плоскостей до фокусов). При этом подразумевается, что до первой главной плоскости луч идет, как бы не преломляясь на сферических границах. Аналогичное поведение луча подразумевается и после второй главной плоскости.



На рисунке приведен пример построения изображения предмета оптической системой с заданными главными плоскостями  $H_1$  и  $H_2$ , и заданными положениями фокусов  $F_1$  и  $F_2$ . Для построения изображения достаточно рассмотреть любые два луча из трех приведенных на рисунке.

Первый луч идет параллельно оптической оси системы до первой главной плоскости. Здесь он исчезает и появляется вновь на той же высоте, но во второй главной плоскости. Пространство между двумя главными плоскостями как бы отсутствует. Из точки на второй главной плоскости первый луч дальше по прямой линии проходит через задний фокус оптической системы, как это происходит после обычной тонкой линзы.

Второй луч из точки предмета идет в центр отсутствующей тонкой линзы, в точку пересечения первой главной плоскости и оптической оси системы. Считая, что пространства между главными плоскостями нет, продолжаем луч из точки пересечения второй главной плоскости и оптической оси параллельно ходу луча до первой главной плоскости, так как тонкая линза не изменяет направление луча, проходящего через центр тонкой линзы.

Третий луч проходит через передний фокус до первой главной плоскости и от второй главной плоскости идет параллельно оптической оси.

-----

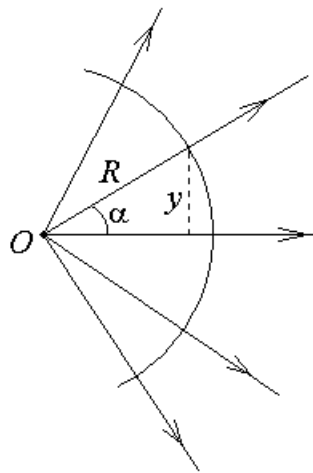
Положение главных плоскостей системы, как и положение фокусов, можно найти через элементы матрицы всей оптической системы, но мы этим заниматься не будем.

**Экзамен. Гомоцентрический пучок лучей. Приведенный радиус кривизны.**  
**Правило ABCD.**

Гомоцентрический пучок лучей — это пучок, образованный лучами, выходящими из одной точки на оптической оси, или лучами, идущими в одну точку на оптической оси.

В изотропной среде лучи перпендикулярны поверхности равных фаз. Гомоцентрическому пучку лучей соответствует сферический фронт волны.

По определению  $\frac{R}{n}$  — приведенный радиус гомоцентрического пучка лучей, где  $R$  — радиус соответствующего сферического фронта волны,  $n$  — показатель преломления среды.



Для любой точки гомоцентрического пучка лучей выполняется соотношение  $y = \alpha R$  с учетом малости угла  $\alpha$  в приближении параксиальной оптики. Здесь  $y$  — расстояние от точки на фронте волны до оптической оси,  $\alpha$  — угол между лучом, проходящем через рассматриваемую точку, и оптической осью. С учетом равенства  $y = \alpha R$  получим  $\frac{R}{n} = \frac{y}{n\alpha}$  — приведенный радиус равен отношению двух координат луча в формализме матричной оптики.

Пусть гомоцентрический пучок лучей проходит через оптическую систему с заданной матрицей  $\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{y_2}{n_2 \alpha_2} = \frac{A y_1 + B n_1 \alpha_1}{C y_1 + D n_1 \alpha_1} = \frac{A \cdot \frac{y_1}{n_1 \alpha_1} + B}{C \cdot \frac{y_1}{n_1 \alpha_1} + D} = \frac{A \cdot \frac{R_1}{n_1} + B}{C \cdot \frac{R_1}{n_1} + D}.$$

Откуда

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{A \frac{R_1}{n_1} + B}{C \frac{R_1}{n_1} + D} \text{ — это и есть правило ABCD, или правило преобразования}$$

приведенного радиуса гомоцентрического пучка лучей.

**Факультатив. Гауссов пучок — хорошее приближение для описания лазерного пучка лучей.**

На первой лекции мы рассматривали частные решения волнового уравнения  $\Delta E - \frac{1}{V_\phi^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ , которые получали методом разделения

переменных. Сначала, разделяя временную и пространственные переменные, мы получили уравнение гармонических колебаний для зависимости от времени и уравнение Гельмгольца  $\Delta R + k^2 R = 0$  для координатной зависимости. Далее, разделяя переменные в декартовых координатах, мы получили решения уравнения Гельмгольца в виде плоских волн.

Если при поиске частных решений уравнения Гельмгольца разделять переменные в других системах координат, то получаются решения с другой симметрией.

При разделении переменных в цилиндрической системе координат получается, в частности, волна со спиральной поверхностью равных фаз. Эта волна имеет так называемый орбитальный момент импульса:

<http://igorivanov.blogspot.com/2011/04/oam.html>

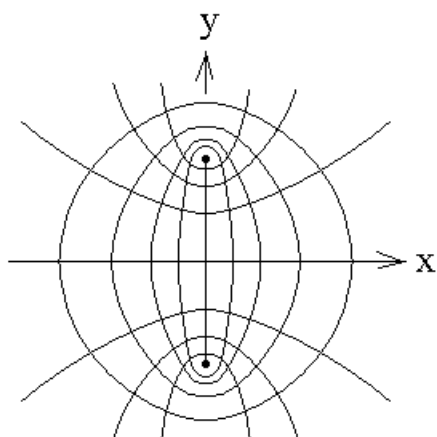
Можно рассмотреть разделение переменных в эллиптической системе координат. В двумерном случае эллиптические координаты  $\xi \geq 0$  и  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  вводятся через декартовы координаты  $x, y$ , гиперболический синус  $sh$  и гиперболический косинус  $ch$  следующим образом:

$$\begin{cases} x = a \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\eta) \\ y = a \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\eta) \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} sh(\xi) \equiv \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} \\ ch(\xi) \equiv \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} \end{cases}$$

В таком случае линии постоянного значения  $\xi$  являются эллипсами, а линии постоянного значения  $\eta$  — гиперболами.

Все рассматриваемые эллипсы и гиперболы имеют два общих фокуса с декартовыми координатами  $(0, a)$  и  $(0, -a)$ .

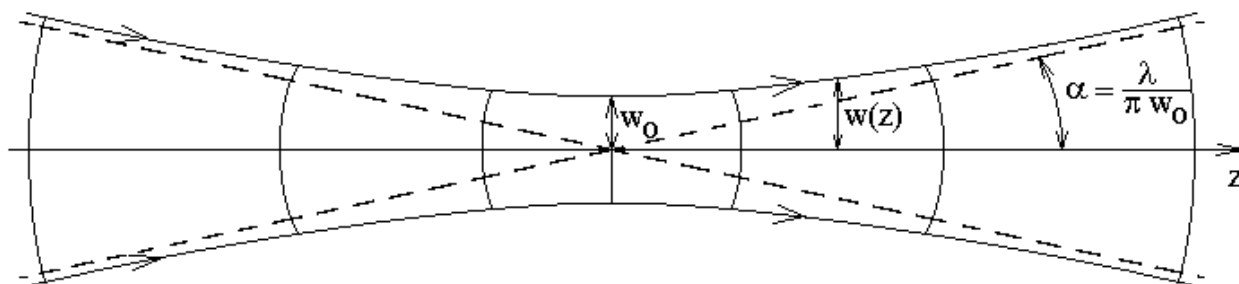




В трехмерном случае добавим в качестве третьей координаты угол поворота вокруг оси  $x$ .

Если при решении уравнения Гельмгольца  $\Delta R + k^2 R = 0$  переменные разделять в эллиптической системе координат, то получатся решения, в которых лучи распространяются по гиперболам  $\eta = const$ . Если рассмотреть только лучи, составляющие малые углы с оптической осью, то получатся так называемые Гауссовы пучки. Гауссовы пучки являются хорошим приближением для описания излучения лазеров.

Изменим обозначение горизонтальной оси с  $x$  на  $z$ . Пусть световая волна распространяется вдоль оптической оси  $z$  и образует параксиальный пучок лучей. Примерный ход лучей и поверхности равных фаз изображены на ниже следующем рисунке.



Будем называть пучок лучей гауссовым, если комплексное поле  $\tilde{E}$  световой волны можно найти по следующей формуле:

$$\tilde{E}(t, \vec{r}) = \tilde{E}_0 \cdot \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp\left(ik\left(z - \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) + i\varphi(z)\right) \cdot \exp(-i\omega t) \quad (10.1)$$

$$\text{где } \left\{ \begin{array}{l} w^2(z) = w_0^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2z}{kw_0^2} \right)^2 \right] \\ R(z) = -z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{kw_0^2}{2z} \right)^2 \right] \\ \operatorname{tg}(\varphi(z)) = \frac{kw_0^2}{2z} \end{array} \right. \quad (10.2)$$

В приближении параксиальной оптики справедливо неравенство  $w_0 \gg \lambda$ .

Пунктирными линиями показаны асимптоты лучей при большом удалении от начала координат.

В формулах (10.1) и (10.2) величина  $w(z)$  представляет собой зависимость радиуса пучка лучей от координаты  $z$  вдоль оптической оси,  $w_0$  — радиус пучка лучей в самом узком месте, в так называемой шейке каустики при  $z = 0$ . Каустическая поверхность (каустика) в оптике — это поверхность, являющаяся огибающей семейства световых лучей, испущенных светящейся точкой и прошедших через оптическую систему. В приближении геометрической оптики эту поверхность имеет смысл рассматривать только с учетом сферической аберрации, которая будет рассмотрена позднее. В нашем случае каустическая поверхность — это поверхность, которая получается при вращении траектории одного луча на краю пучка лучей вокруг оптической оси. Величина  $R(z)$  представляет собой зависимость радиуса кривизны гомоцентрического пучка лучей от координаты  $z$  вдоль оптической оси.  $\varphi(z)$  — фазовый сдвиг относительно фазы плоской волны, если бы она распространялась вдоль оси  $z$ .

В формуле (10.1) для электрического поля  $E$  световой волны само поле  $E$  умышленно указано без значка вектора, так как направление вектора  $E$  различно в разных точках гауссова пучка. В каждой пространственной точке вектор  $E$  перпендикулярен лучу в этой точке.

#### Свойства гауссовых пучков.

1). Лучи распространяются по гиперболам, а не по прямым линиям, как того требует принцип Ферма (мы рассмотрим принцип Ферма чуть позднее).

2). Фазовая скорость волн в пустоте не равна универсальной константе  $c$ , так как сдвиг фаз  $\varphi(z)$  в выражении (10.1) является функцией координаты  $z$ , что видно из третьей формулы системы (10.2). Фазовую скорость можно найти из уравнения поверхности равных фаз, которая получается, если приравнять фазу уравнения (10.1) константе:

$$kz - k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \varphi(z) - \omega t = \text{const},$$

Для простоты рассмотрим фазовую скорость только вдоль оптической оси, когда  $x = 0$  и  $y = 0$ , и получим

$$kz + \varphi(z) - \omega t = \text{const}.$$

Продифференцируем это уравнение по времени, считая  $z$  и  $\varphi$  функциями времени, и получим:

$$k \frac{dz}{dt} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{\varphi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k + \frac{d\varphi}{dz}} > \frac{\omega}{k} = c.$$

Здесь неравенство получено с учетом производной от равенства  $\text{tg}(\varphi) = \frac{kw_0^2}{2z}$  по  $z$ :

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{kw_0^2}{2z^2}, \text{ откуда } \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{kw_0^2}{2z^2} \cdot \cos^2(\varphi) < 0.$$

То есть фазовая скорость отличается от универсальной константы  $c$ .

3). Чем более узкой оказывается шейка каустики, тем больше расходимость пучка лучей.

Угловой диаметр расходимости равен  $2\alpha = \frac{4\lambda}{\pi 2w_0} \approx \frac{\lambda}{2w_0}$ . Такая величина

угловой расходимости характерна для дифракции на препятствии размером  $2w_0$ , например для дифракции на отверстии диаметром  $2w_0$ .

4). Шейка каустики не отображается линзой по законам геометрической оптики. Это необходимо учитывать при попытке сфокусировать лазерное излучение.

Гауссов пучок после линзы снова становится гауссовым пучком, только с другими параметрами. Это позволяет найти, как линза изменяет положение шейки каустики.

На практике при попытке сфокусировать лазерное излучение возникает следующая задача. Известен радиус шейки каустики  $w_{01}$  и  $z_1$  — координата линзы относительно шейки каустики. Требуется найти радиус шейки каустики  $w_{02}$  после линзы и координату линзы  $z_2$  относительно новой шейки каустики. Для решения этой задачи нужно сделать следующее:

а). Сначала найдем  $R_1$  — радиус кривизны фронта волны в точке с координатой  $z = z_1$  непосредственно перед линзой по второй формуле системы (10.2)

$$R_1(z) = -z_1 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{kw_{01}^2}{2z_1} \right)^2 \right]$$

по известным параметрам  $w_{01}, z_1$  пучка лучей до линзы.

б). Найдем радиус  $w_1$  пучка лучей на линзе по формуле 1 системы (10.2)

$$w_1^2(z) = w_{01}^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2z_1}{kw_{01}^2} \right)^2 \right]$$

также по известным величинам  $w_{01}, z_1$  пучка лучей до линзы.

Теперь будем искать параметры пучка лучей после линзы.

в). По правилу ABCD из величины радиуса кривизны фронта непосредственно перед линзой можно найти радиус кривизны сразу за линзой:

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D},$$

где для тонкой линзы  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$ .

Радиус пучка лучей при прохождении через тонкую линзу не изменяется, поэтому  $w_2 = w_1$ .

г). Решим теперь систему из первых двух уравнений системы (10.2)

$$\begin{cases} w_2^2(z_2) = w_{02}^2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2z_2}{kw_{02}^2} \right)^2 \right] \\ R_2(z_2) = -z_2 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{kw_{02}^2}{2z_2} \right)^2 \right] \end{cases}$$

относительно неизвестных величин  $w_{02}$  и  $z_2$  для пучка лучей после линзы при уже известных величинах  $w_2$  — радиуса пучка лучей на линзе, и  $R_2$  — радиуса кривизны фронта волны сразу за линзой. Решение этой системы позволяет найти положение  $-z_2$  новой шейки каустики относительно линзы и новый радиус шейки каустики  $w_{02}$ .