Экзамен. Распространение света в неоднородной среде. Эйконал. Уравнение эйконала.

Эйконал — от греческого слова eikon — изображение.

Будем называть оптической длиной произведение nl, где l — геометрическая длина, n — показатель преломления среды.

Эйконал — это оптическая длина пути вдоль луча света.

Пусть L — эйконал, тогда $dL \equiv n \cdot dl$, если отрезок dl направлен вдоль луча. Здесь рассматривается малый отрезок *dl*, так как показатель преломления среды *n* может изменяться от точки к точке.

Тогда

$\frac{\partial L}{\partial l} = n$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль луча.

Покажем, что оптическая длина пути пропорциональна разности фаз световых волн в начале и в конце пути. И действительно, рассмотрим разность фаз $\Delta\varphi$ световых волн в начале и в конце пути некоторого луча. Разность фаз $\Delta\varphi$ можно выразить через время распространения луча Δt. Пока фаза в течение времени Δt распространяется от первой точки до второй, фаза в первой точке изменится на $\omega\Delta t$. Следовательно, разность фаз в последний момент времени в этих двух точках равна:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega\frac{\Delta l}{V_\phi} = \omega\frac{\Delta l}{\frac{c}{n}} = \frac{\omega}{c}\,n\,\Delta l = k_0\,n\,\Delta l = k_0\,\Delta L, \quad \text{где} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$$

— волновое число, если свет этой частоты будет распространяться в вакууме.

При переходе из среды в среду частота света сохраняется, а длина волны и волновое число изменяются.

$\Delta\varphi = k_0\,\Delta L$ — разность фаз $\Delta\varphi$ в начале и в конце пути пропорциональна оптической длине пути ΔL.

В соответствии с этим результатом дадим второе более общее (и правильное) определение эйконала:

$L \equiv \frac{\varphi}{k_0}$, где k_0 — волновое число в вакууме, φ — начальная фаза световой волны или фаза в нулевой момент времени. Начальная фаза $\varphi(\vec{r})$ в каждой точке пространства своя, тогда во втором определении эйконала окажется, что эйконал $L(\vec{r})$ определен в каждой точке пространства $\vec{r}$, а не только на одной кривой вдоль луча, как в первом (предварительном) определении эйконала.

В малом объеме можно считать, что показатель преломления почти постоянный $n \approx const$, то есть среда почти однородная, а световая волна почти плоская, если радиус кривизны фронта волны гораздо больше размеров рассматриваемого объема. Для плоской волны в однородной среде направление луча перпендикулярно поверхности равных фаз, то есть перпендикулярно поверхности, на которой постоянен эйконал $L = const$, так как эйконал пропорционален фазе $L \equiv \frac{\varphi}{k_0}$.

Градиент любого скалярного поля перпендикулярен поверхности постоянного значения этого поля. Тогда градиент эйконала $\vec{\nabla} L$ перпендикулярен поверхности $L = const$, а с учетом того, что направление луча перпендикулярно поверхности $L = const$, получим, что градиент эйконала $\vec{\nabla} L$ направлен вдоль луча.

Проекция градиента скалярного поля на любое направление равна производной от скалярного поля по этому направлению. Тогда для любого скалярного поля модуль градиента равен производной от поля по направлению градиента:

$\left|\vec{\nabla} L\right| = \frac{\partial L}{\partial l}$, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль луча, а с учетом того, что $\frac{\partial L}{\partial l} = n$, получаем

$\left|\vec{\nabla} L\right| = n$ =>

$\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$, где $\vec{e}_s \equiv \frac{\vec{S}}{\left|\vec{S}\right|}$ — единичный вектор вдоль луча, где $\vec{S}$ — вектор Пойнтинга, который направлен вдоль луча по самому смыслу луча.

$\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$ — уравнение эйконала. =>

$\left(\vec{\nabla} L\right)^2 = n^2$ — это уравнение тоже называют уравнением эйконала.

Факультатив. Эйконал по Бутикову.

В книге Е. И. Бутикова "Оптика" и в монографии М. Борна и Э. Вольфа "Основы оптики" определением эйконала L является выражение для напряженности светового поля:

$$\tilde{\vec{E}}\left(t,\vec{r}\right) = E_0\left(\vec{r}\right) \cdot \tilde{\vec{e}}_p\left(\vec{r}\right) \cdot e^{i\left(k_0 L\left(\vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0\right)}$$

Это определение отличается от нашего второго определения эйконала несущественной константой φ_0.

Экзамен. Уравнение для вычисления траектории луча в неоднородной среде.

Возьмем градиент от уравнения $\frac{\partial L}{\partial l} = n$ и получим

$$\vec{\nabla} n = \vec{\nabla}\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\vec{\nabla} L = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) \quad =>$$

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) \qquad (11.1)$$

Это уравнение понадобится нам при рассмотрении следующего экзаменационного вопроса. Разложим производную от произведения и получим

$$\vec{\nabla} n = \frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right) = \vec{e}_s \cdot \frac{\partial n}{\partial l} + n \cdot \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$$

откуда выразим $\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l}$ и получим уравнение, позволяющее вычислять траекторию луча в неоднородной среде:

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial l} = \frac{1}{n} \cdot \vec{\nabla} n - \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial l} \cdot \vec{e}_s .$$

И действительно, перепишем это уравнение в виде

$$d\vec{e}_s = \left(\frac{1}{n} \cdot \vec{\nabla} n - \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial l} \cdot \vec{e}_s\right) \cdot dl \qquad (11.2).$$

Это уравнение позволяет найти изменение направления луча $d\vec{e}_s$ при небольшом перемещении dl вдоль луча. Если в исходной точке пространства $\vec{r}$ задано направление луча $\vec{e}_s$ и в каждой точке среды известен показатель преломления $n\left(\vec{r}\right)$, то в исходной точке пространства можно вычислить выражение в скобках в правой части уравнения (11.2). Тогда уравнение (11.2) позволяет найти изменение вектора $\vec{e}_s$ и новое направление луча в соседней точке вдоль луча на расстоянии dl от исходной точки. Затем новую точку и новое направление луча можно рассматривать, как исходные, и повторить процедуру.

Уравнение (11.2) показывает, в каком направлении поворачивает луч в неоднородной среде. Формула для изменения единичного вектора вдоль луча содержит два слагаемых. Второе слагаемое направлено вдоль луча $\vec{e}_s$ и не изменяет его направления. Первое слагаемое $\frac{1}{n}\vec{\nabla} n \cdot dl$ направлено, как и градиент показателя преломления $\vec{\nabla} n$. Градиент направлен в сторону увеличения показателя преломления.

Следовательно, луч поворачивает в оптически более плотную среду, в среду с большим показателем преломления.

<u>**Экзамен. Распространение света в среде, где показатель преломления зависит только от вертикальной координаты.**</u>

Направим ось z вертикально вверх в направлении, в котором изменяется показатель преломления среды.

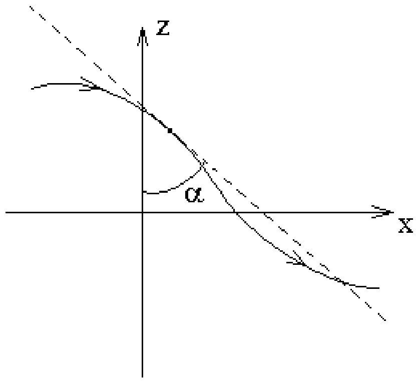
Закон Снеллиуса $n_1 \cdot \sin\left(\alpha_1\right) = n_2 \cdot \sin\left(\alpha_2\right)$ естественно обобщить на этот случай в виде уравнения $n \cdot \sin\left(\alpha\right) = const$, где α — угол между вертикалью и лучом.

Докажем справедливость этого предположения.

В предыдущем вопросе мы получили формулу (11.1):

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right)=\vec{\nabla}n.$$

Мы рассматриваем случай зависимости показателя преломления только от вертикальной координаты, тогда $\vec{\nabla}n \parallel \vec{e}_z$. Напомним, что здесь $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль реального луча, а не вдоль любого направления.



Рассмотрим цепочку равенств:

$\left(\vec{e}_x,\vec{e}_z\right)=0$ => $\left(\vec{e}_x,\vec{\nabla}n\right)=0$ => $\left(\vec{e}_x,\frac{\partial}{\partial l}\left(n\vec{e}_s\right)\right)=0$ =>

$\frac{\partial}{\partial l}\left(n\left(\vec{e}_x,\vec{e}_s\right)\right)=0$ => $\frac{\partial}{\partial l}\left(n\cdot\cos\left(\vec{e}_x,\vec{e}_s\right)\right)=0$ =>

$\frac{\partial}{\partial l}\left(n\cdot\sin\left(\vec{e}_z,\vec{e}_s\right)\right)=0$ => $\frac{\partial}{\partial l}\left(n\cdot\sin\left(\alpha\right)\right)=0$ =>

$n\cdot\sin\left(\alpha\right)=const$.

Величина $n\cdot\sin\left(\alpha\right)$ сохраняется при перемещении вдоль луча, где α — угол между лучом и вертикалью, если показатель преломления зависит только от вертикальной координаты.

Факультативная вставка.

В более общем случае в малом объеме всегда можно считать, что градиент показателя преломления $\vec{\nabla}n$ почти постоянен. Можно заменить в этом малом объеме реальную зависимость $\vec{\nabla}n$ от $\vec{r}$ на среднее значение градиента. Тогда в этом малом объеме луч будет поворачивать так, чтобы величина $n\cdot\sin\left(\alpha\right)$ сохранялась, здесь α — угол между лучом и градиентом показателя преломления. То есть, равенство $n\cdot\sin\left(\alpha\right)=const$ позволяет найти, как поворачивает луч в произвольной среде.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Принцип Ферма.

Принцип Ферма утверждает, что свет распространяется по пути, который занимает минимум времени.

Минимальное время распространения от точки I до точки II означает, что

$$\int_I^{II} dt = \min .$$

$$dt = \frac{dl}{V_ф} = \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} \cdot n \cdot dl \qquad \Rightarrow$$

$$\int_I^{II} \frac{1}{c} \cdot n \cdot dl = \min \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_I^{II} n \cdot dl = \min .$$

Докажем это равенство, то есть докажем, что оптическая длина между точками I и II вдоль реального луча меньше, чем вдоль любой другой мысленной кривой, соединяющей точки I и II.

Обозначим: $d\vec{l}$ — перемещение вдоль реального луча, $d\vec{l}\,'$ — перемещение вдоль любой мыслимой кривой.

Тогда достаточно доказать, что $\int_I^{II} n \cdot dl \le \int_I^{II} n \cdot dl'$. В дальнейших формулах нужно внимательно следить за тем, где стоит dl, а где — dl'.

$$1 \ge \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) \qquad \Rightarrow$$

$\int_I^{II} n \cdot dl' \ge \int_I^{II} n \cdot \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) \cdot dl'$, где оба интеграла взяты вдоль любой мыслимой кривой.

В правой части неравенства заменим n на $\frac{\partial L}{\partial l}$ согласно нашему первому определению эйконала L, где $\frac{\partial}{\partial l}$ — производная вдоль реального луча. Тогда

$$\int_I^{II} n \cdot dl' \ge \int_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l} \cdot \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) \cdot dl' = \int_I^{II} \left|\vec{\nabla} L\right| \cdot \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) \cdot dl' .$$

Учтем, что градиент эйконала направлен вдоль луча, что следует из уравнения эйконала в форме $\vec{\nabla} L = n\vec{e}_s$. Откуда

$$d\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} L \qquad \Rightarrow \qquad \cos\left(d\vec{l}, d\vec{l}\,'\right) = \cos\left(\vec{\nabla} L, d\vec{l}\,'\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\int_I^{II} n \cdot dl' \ge \int_I^{II} \left|\vec{\nabla} L\right| \cdot \cos\left(\vec{\nabla} L, d\vec{l}\,'\right) \cdot dl' = \int_I^{II} \left(\vec{\nabla} L\right)_{d\vec{l}\,'} dl' = \int_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l'} dl' = \int_I^{II} dL =$$

$$= L(II) - L(I) .$$

Перейдем теперь в правой части неравенства от интеграла вдоль любой мыслимой кривой к интегралу вдоль реального луча.

$$\int_I^{II} n \cdot dl' \ge L(II) - L(I) = \int_I^{II} \frac{\partial L}{\partial l} dl = \int_I^{II} n \cdot dl \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{I}^{II} n \cdot dl' \geq \int_{I}^{II} n \cdot dl .$$

Что и требовалось доказать.

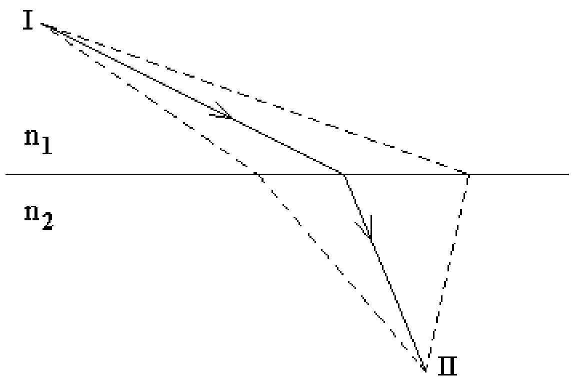
Факультативная вставка.

Принцип Ферма выполняется не строго. Так, например, в гауссовом пучке лучей даже в пустоте лучи распространяются не по кратчайшим прямым линиям, а по гиперболам с радиусом кривизны R, таким что $\frac{R}{\lambda} \approx \left(\frac{D}{\lambda}\right)^3$, где D — диаметр пучка лучей, λ — длина волны света. Сильнее всего лучи искривляются в шейке каустики, где пучок лучей имеет наименьший диаметр.

Где же допущена нестрогость в выводе принципа Ферма? Дело в том, что равенство $V_\phi = \frac{c}{n}$ строго выполняется только для однородной плоской волны, поэтому $dt = \frac{dl}{V_\phi} \neq \frac{dl}{\frac{c}{n}} = \frac{1}{c} \cdot n \cdot dl$. Как мы рассматривали раньше, в гауссовом пучке в пустоте фазовая скорость $V_\phi > c$.

Конец факультативной вставки.

Факультатив. Из принципа Ферма можно получить закон преломления.



Закон Снеллиуса можно вывести из того, что оптическая длина пути от точки I до точки II для реального луча должна быть меньше, чем для любого другого, изображенного пунктиром.

То есть $\frac{n_1 h_1}{\cos(\alpha_1)} + \frac{n_2 h_2}{\cos(\alpha_2)} = \min$ при условии $h_1 \, tg(\alpha_1) + h_2 \, tg(\alpha_2) = const$.

Подставим в первое равенство $\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{1 + tg^2(\alpha)}$ и получим

$$n_1 h_1 \sqrt{1 + tg^2(\alpha_1)} + n_2 h_2 \sqrt{1 + tg^2(\alpha_2)} = \min$$

Возьмем от этого равенства производную $\frac{d}{d\left(tg(\alpha_1)\right)}$ и получим

$$n_1 h_1 \frac{tg(\alpha_1)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_1)}} + n_2 h_2 \frac{tg(\alpha_2)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_2)}} \cdot \frac{d(tg(\alpha_2))}{d(tg(\alpha_1))} = 0$$

Подставим $\frac{tg(\alpha_1)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_1)}} = \sin(\alpha_1)$, аналогично $\frac{tg(\alpha_2)}{\sqrt{1+tg^2(\alpha_2)}} = \sin(\alpha_2)$, кроме того $\frac{d(tg(\alpha_2))}{d(tg(\alpha_1))} = -\frac{h_1}{h_2}$ из условия $h_1\, tg(\alpha_1) + h_2\, tg(\alpha_2) = const$ и получим

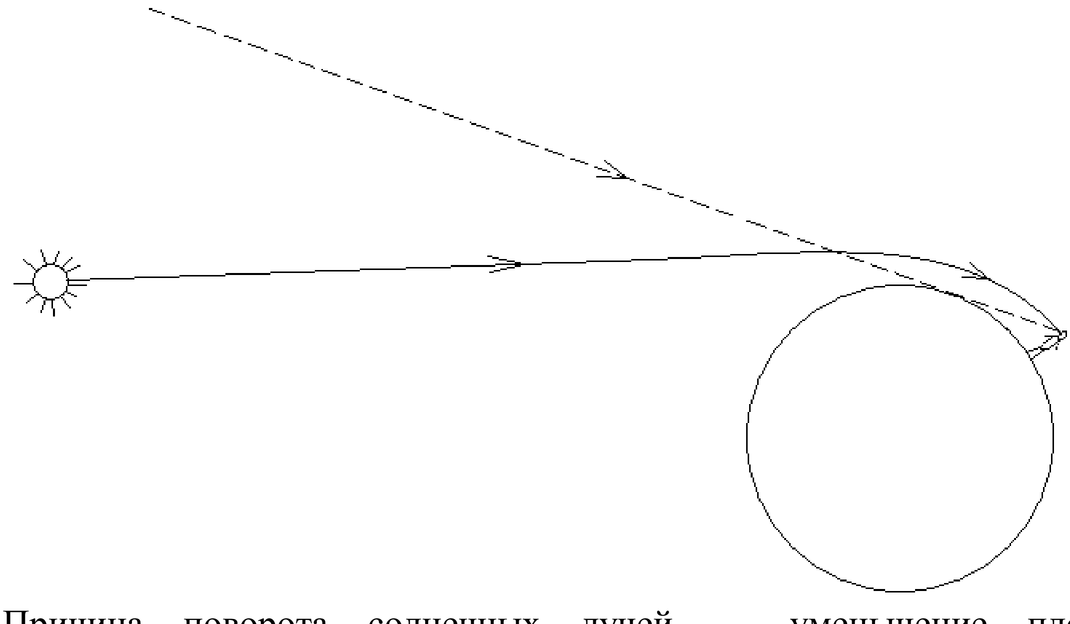
$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$$

Экзамен. Рефракция.

Понятие рефракции имеет три смысла.

1). В первом смысле рефракция — любое преломление света. Рефрактометр — прибор для измерения показателя преломления среды.

2). Во втором смысле рефракция (в атмосфере) — наблюдение Солнца из-под линии горизонта Земли.



Причина поворота солнечных лучей — уменьшение плотности атмосферы Земли с увеличением высоты над Землей. Дело в том, что с уменьшением плотности и соответственно концентрации молекул воздуха N уменьшается показатель преломления n, так как в разреженной среде $(n-1) \sim N$.

В неоднородной среде с изменяющимся от точки к точке показателем преломления свет поворачивает в оптически более плотную среду. В нашем случае свет поворачивает в сторону Земли.

3). В двух первых смыслах рефракция — это явление. В третьем смысле рефракция — это физическая величина.

$R \equiv \dfrac{V}{\nu} \cdot \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ — рефракция, молярная или молекулярная рефракция. Здесь V — объем вещества, ν — число молей, $\dfrac{V}{\nu}$ — объем одного моля, n — показатель преломления среды.

Часто вместо молярной рефракции рассматривают удельную рефракцию $\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$, где ρ — плотность среды. Здесь по сравнению с молярной рефракцией объем одного моля $\dfrac{V}{\nu}$ заменен объемом единицы массы $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{V}{m}$.

Молярная рефракция представляет интерес для анализа формулы Лоренц — Лорентца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha ,$$

где N — концентрация молекул, α — поляризуемость одной молекулы или коэффициент пропорциональности между наведенным дипольным моментом молекулы $\vec{p}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$:

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} ,$$

n — показатель преломления среды.

Формула Лоренц — Лорентца для оптических полей доказывается аналогично формуле Клаузиуса — Моссотти в электростатике:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha .$$

Дело в том, что размер атома в тысячу раз меньше длины волны света, поэтому световое поле можно считать медленным полем для атома.

В оптике $n = \sqrt{\varepsilon \mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$ => $\varepsilon \approx n^2$.

Из определения рефракции следует $\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = R \dfrac{\nu}{V}$. Тогда с учетом формулы Лоренц — Лорентца получаем:

$$R \frac{\nu}{V} = \frac{4}{3} \pi N \alpha \quad => \quad R = \frac{4}{3} \pi \frac{NV}{\nu} \alpha ,$$

где $\dfrac{NV}{\nu} = N_A$ — число Авогадро или число молекул в одном моле. Тогда

$$R = \frac{4}{3} \pi N_A \alpha .$$

То есть молярная рефракция должна сохраняться независимо от концентрации вещества.

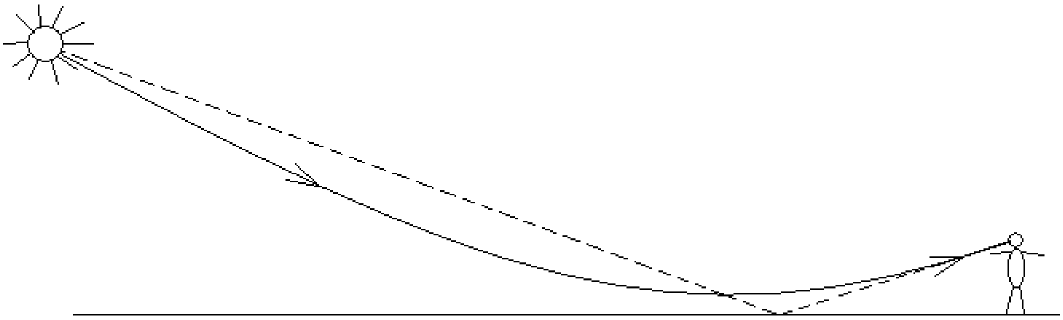
Экзамен. Миражи.

Если смотреть летом вдоль раскаленного шоссе, то где-то далеко асфальт кажется мокрым, покрытым лужами.

Причина этой иллюзии в том, что у разогретого асфальта выше температура воздуха T, а давление воздуха p одинаковое: $p = NkT$, следовательно, у разогретого асфальта меньше концентрация молекул воздуха N.

Меньшая концентрация молекул означает, меньшее значение показателя преломления, так как при небольшой плотности из формулы Лоренц-Лорентца следует $(n-1) \sim N$.

Свет поворачивает в оптически более плотную среду:



При скользящем падении света свет поворачивает у поверхности асфальта, как бы отражаясь от лужи. В этой луже, которой на самом деле нет, видны отражения неба, солнца, деревьев или фар автомобиля.

В раскаленной пустыне свет поворачивает не только у раскаленного песка, но и в высоких разреженных слоях атмосферы. Эти отражения порождают миражи. Отражения позволяют видеть предметы из-под линии горизонта и видеть водные поверхности, которых на самом деле нет.

<u>Спектр света.</u>

Спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Спектр — это зависимость интенсивности света от координаты в этой плоскости. Спектр света пропорционален квадрату модуля Фурье образа электрического поля.