Экзамен. Диапазоны электромагнитных волн и источники излучения.

Для волны любой природы произведение длины волны на частоту равно фазовой скорости волны: $\lambda\nu = c$. С 1983 года значение скорости света в вакууме постулируется: $c \equiv$ 299792458 м/с, что позволяет иметь единый эталон для длины и времени.

Электромагнитные волны делятся на диапазоны в зависимости от длины волны λ или от частоты ν.

Разделение на диапазоны приблизительно определяется типами источников излучения. Для любых источников электромагнитное излучение возникает только при ускоренном движении заряженных частиц.

Рассмотрим диапазоны, начиная с самых больших длин волн.

Низкие или промышленные частоты.

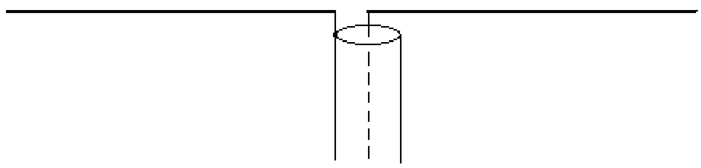
$\lambda > 3$ км $\qquad \nu < 100$ кГц

Источники — паразитное излучение промышленных электроустановок: электродвигатели, электрогенераторы.

Радиоволны.

1м $< \lambda <$ 3км $\qquad$ 100кГц $< \nu <$ 300МГц

Источники — штыревые антенны.



Простейшая антенна — два штыря и коаксиальный кабель, по которому сигнал подводится к передающей антенне.

Микроволновой или СВЧ диапазон.

СВЧ — сверхвысокие частоты.

1мм $< \lambda <$ 1м $\qquad$ 300МГц $< \nu <$ 300ГГц

Источники — магнетроны и клистроны (объемные полые металлические резонаторы).

Передача от резонатора к антенне производится по полому волноводу. Антенна со сферическим отражателем — спутниковая тарелка. Телевещание, радиолокация.

Инфракрасный свет.

ИК излучение.

0.7мкм $< \lambda <$ 1мм.

Частоту в этом диапазоне часто измеряют в обратных сантиметрах: 1см$^{-1}$ $\approx$ 30ГГц. Частота 1см$^{-1}$ по определению соответствует излучению с длиной волны 1см.

10см$^{-1}$ = 300ГГц $< \nu <$ 14000см$^{-1}$ $\approx$ 430ТГц.

Источники — излучение молекул при возбуждении колебания или вращения молекулы — вращательные и колебательные спектры молекул. Излучение нагретых тел.

Видимый свет.

0.4мкм $< \lambda <$ 0.7мкм.

Коротковолновая граница — фиолетовый свет, длинноволновая граница — красный свет.

Вместо частот обычно говорят об энергии кванта света $E = h\nu$. Энергию обычно выражают в электрон-вольтах — это энергия, которую приобретает электрон, пролетая напряжение в 1 Вольт. Энергия кванта света 1эВ = $1.6*10^{-19}$Дж соответствует частоте света ν = 242ТГц и длине волны λ = 1.24мкм.

1.8эВ $< h\nu <$ 3.1эВ

Источники — излучение атомов и молекул при возбуждении их электронных оболочек.

Ультрафиолетовый свет.

10нм $< \lambda <$ 400нм   3.1эВ $< h\nu <$ 125эВ

Источники — излучение атомов и ионов при возбуждении их электронных оболочек, рекомбинация положительных ионов и электронов.

Рентген.

0.01нм $< \lambda <$ 10нм   125эВ $< h\nu <$ 125кэВ

Источники — излучение атома после выбивания электрона внутренних электронных оболочек и тормозное излучение в металле электронов, ускоренных электрическим напряжением — рентгеновская трубка.

Гамма излучение.

$\lambda <$ 0.01нм $h\nu >$ 125кэВ

Источники — излучение возбужденных атомных ядер, тормозное излучение в ускорителях элементарных частиц при взаимодействии ускоренной частицы с мишенью, излучение при взаимных превращениях элементарных частиц, космическое излучение.

Для сравнения энергия покоя электрона: 511кэВ. Так при аннигиляции электрона и позитрона происходит излучение двух γ квантов с соответствующей энергией.

Экзамен. Разложение светового поля по частотам.

Рассмотрим вещественную напряженность светового поля $\vec{E}(t)$ в одной пространственной точке.

Преобразование Фурье позволяет представлять световое поле $\vec{E}(t)$ в одной точке пространства, как суперпозицию гармонических колебаний разных частот.

Рассмотрим прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}(t)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt \end{cases}$$

, здесь коэффициент $\frac{1}{2\pi}$ может быть разделен на два сомножителя в интегралах произвольным образом.

Вещественность зависимости $\vec{E}(t)$ накладывает некоторые ограничения на вид ее Фурье образа $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$. Рассмотрим $\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$:

$$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{E}(t)e^{i\omega t}dt\right)^*=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\vec{E}(t)\right)^*\left(e^{i\omega t}\right)^*(dt)^*=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)e^{-i\omega t}dt=\tilde{\vec{E}}_0(-\omega)$$

Откуда:

$\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)=\tilde{\vec{E}}_0(-\omega)$.

То есть, Фурье образ поля $\vec{E}(t)$ на отрицательных частотах может быть выражен, как комплексно сопряженная величина к Фурье образу на положительных частотах. Тогда Фурье интеграл по всем частотам можно выразить через Фурье интеграл только по положительным частотам

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

для этого в первом интеграле заменим ω на $(-\omega)$ и воспользуемся равенством $\tilde{\vec{E}}_0(-\omega)=\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)$, тогда получим

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0^*(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega.$$

Заметим, что первое слагаемое является комплексно сопряженным ко второму, тогда

$$\vec{E}(t)=\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)^*+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega=\mathrm{Re}\left(\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right),$$

так как при сложении комплексно сопряженных величин вещественная часть удваивается, а мнимая сокращается. Тогда

$\vec{E}(t)=\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_0(\omega)\cdot e^{-i\omega t}d\omega\right)$ — разложение светового поля по положительным частотам.

В результате получаем разложение вещественного светового поля, как по всем частотам, так и по положительным частотам

$$\begin{cases} \vec{E}(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega = \mathrm{Re}\int_{0}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \\ \tilde{\vec{E}}_0(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega t} dt \end{cases}.$$

Будем называть комплексным световым полем $\tilde{\vec{E}}(t)$ выражение:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \int_{0}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_0(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega,$$

Тогда Фурье образ $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)$ показывает, сколько в поле $\tilde{\vec{E}}(t)$ содержится сигнала с частотой ω.

$\vec{E}(t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}(t)\right)$ — связь вещественного $\vec{E}(t)$ и комплексного $\tilde{\vec{E}}(t)$ световых полей.

<u>**Экзамен. Ряды Фурье для светового поля.**</u>

Обычно мы не знаем величину электрического поля на бесконечном интервале времени.

Допустим, нам известно поле $\vec{E}(t)$ на промежутке времени T.

В таком случае за пределами известного интервала времени T либо считают поле $\vec{E}(t)$ равным нулю, либо считают, что поле периодически повторяется с периодом T. Пусть поле $\vec{E}(t)$ — периодическая функция времени. Периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье по кратным частотам.

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}_m \cdot e^{-i\omega_m t}, \text{ где } \omega_m = m\frac{2\pi}{T}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Здесь амплитуды ряда Фурье находятся по формулам:

$$\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_m t} dt.$$

Аналогично интегралу Фурье из вещественности поля $\vec{E}(t)$ следует, что амплитуды разложения по отрицательным частотам должны быть комплексно сопряженными амплитудам на положительных частотах

$$\tilde{\vec{E}}_m^* = \tilde{\vec{E}}_{-m}.$$

Объединяя парами комплексно сопряженные слагаемые Фурье разложения поля $\vec{E}(t)$, можно из разложения поля по частотам обоих знаков получить разложение по положительным частотам:

$$\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\tilde{\vec{E}}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}=\frac{\vec{E}_0}{2}+\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{+\infty}\tilde{\tilde{\vec{E}}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}.$$

Окончательно для периодической функции $\vec{E}(t)$ получаем представление в виде ряда Фурье:

$$\begin{cases}\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\tilde{\vec{E}}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}=\frac{\vec{E}_0}{2}+\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{+\infty}\tilde{\tilde{\vec{E}}}_m\cdot e^{-i\omega_m t}\\ \tilde{\tilde{\vec{E}}}_m=\frac{2}{T}\cdot\int_0^T\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt\end{cases}.$$

Экзамен. Спектр света. Разные определения спектра света. Спектр экспоненциально затухающего светового цуга.

Математики часто под спектром понимают Фурье образ $\tilde{\tilde{\vec{E}}}_0(\omega)$ временнóй зависимости $\vec{E}(t)$. В физике исторически спектр света — это цветные изображения входной щели спектрометра в фокальной плоскости его объектива. Эти изображения представляют собой спектр света, падающего на входную щель спектрометра. Вопрос состоит в том, как количественно описать спектр света. Есть несколько подходов к этому вопросу.

В любом случае в физике спектр связан с зависимостью от частоты либо энергии света, либо интенсивности. Энергия пропорциональна интенсивности, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Фурье образ светового поля как раз и играет роль комплексной амплитуды света на определенной частоте света, поэтому спектр света в физике пропорционален квадрату модуля Фурье образа светового поля. Коэффициент пропорциональности в разных случаях вводится по-разному, и обычно вообще не обсуждается, как величина несущественная. Световое поле вещественно, следовательно, квадрат модуля Фурье образа на отрицательных частотах равен квадрату модуля на соответствующих положительных частотах. Поэтому в физике под спектром понимают зависимость квадрата модуля Фурье образа только от положительных частот.

В соответствии с этим мы будем называть спектром света величину пропорциональную квадрату модуля Фурье образа светового поля, как функцию положительной частоты света.

При рассмотрении Фурье образа есть два варианта — интеграл Фурье и ряд Фурье.

Если рассматривается спектр короткого светового импульса G_ω, то берут интеграл Фурье. В качестве примера рассмотрим спектр светового цуга, излучаемого одним атомом при переходе атома из возбужденного в невозбужденное состояние. Амплитуда излучения атома экспоненциально затухает во времени, поэтому световое поле атома в фиксированной точке наблюдения имеет вид:

$$E(t) = E_0\, e^{-\Gamma t} \cos(\omega_0 t) \text{ при } t > 0$$

и световое поле отсутствует при $t < 0$.

Вычислим Фурье образ этого светового поля:

$$\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\Gamma t}\cos(\omega_0 t) e^{i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} E_0\, e^{-\Gamma t}\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(e^{-(\Gamma - i(\omega+\omega_0))t} + e^{-(\Gamma - i(\omega-\omega_0))t}\right)dt =$$

$$= \frac{E_0}{2\pi}\left(\frac{1}{\Gamma - i(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{\Gamma - i(\omega-\omega_0)}\right).$$

Будем рассматривать только положительные частоты $\omega > 0$, кроме того, $\omega_0 \gg \Gamma$, поэтому:

$$\left|\frac{1}{\Gamma - i(\omega+\omega_0)}\right| \ll \left|\frac{1}{\Gamma - i(\omega-\omega_0)}\right|,$$

тогда

$$\tilde{E}_0(\omega) \approx \frac{E_0}{2\pi\left(\Gamma - i(\omega-\omega_0)\right)}.$$

Спектр света G_ω пропорционален квадрату модуля Фурье образа:

$$\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\Gamma^2 + (\omega-\omega_0)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right)^2} = \frac{E_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma}\right),$$

где $G_\omega \sim \mathscr{L}(x) \equiv \dfrac{1}{1+x^2}$ — так называемый лоренцевский контур спектральной линии излучения одиночного атома, где $x \equiv \dfrac{\omega-\omega_0}{\Gamma}$ — безразмерная отстройка частоты ω от центра линии излучения ω_0, Γ — полуширина на полувысоте спектрального контура.

Факультативная вставка.

Если все-таки вводить определенный коэффициент пропорциональности между спектром G_ω и квадратом модуля Фурье образа $\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, то это можно сделать следующим образом. Пусть $G = \dfrac{dW}{dS}$ — энергия электромагнитного поля, которая падает на единичную площадку перпендикулярную свету. Тогда

$$G = \int_{0}^{+\infty} G_\omega \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)\, dt\,, \qquad (1)$$

где $G_\omega \equiv \dfrac{dG}{d\omega}$ — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку в единичном интервале частот; $I(t)$ — интенсивность света или энергия, которая падает на единичную площадку в единицу времени.

Интенсивность света связана с его амплитудой $I(t) = \dfrac{cn}{8\pi\mu} E_0^2(t)$. Если теперь для светового цуга взять $E_0(t) = E_0 e^{-\Gamma t}$ при $t > 0$, в равенстве (1) подставить $G_\omega = \alpha \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$ с неизвестным коэффициентом α, то величину коэффициента можно найти из равенства (1). В результате окажется, что

$$G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu} \left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 .$$

Конец факультативной вставки.

Если вместо светового импульса рассматривается изменение спектра со временем, то берут ряд Фурье. Для вычисления Фурье образа напряженности нужно рассматривать не один момент времени, а некоторый промежуток. Этот промежуток времени *T* усреднения спектра выбирают произвольно. Спектр будет существенно зависеть от этого выбора.

Сначала рассматривают первый промежуток времени *T* и на этом промежутке определяют спектр. С этой целью реальную зависимость светового поля от времени заменяют периодической зависимостью с периодом *T*. На этом периоде световое поле полагается равным реальному световому полю на первом промежутке времени *T*. Для полученного таким образом периодического светового поля находят разложение в ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов этого разложения представляют собой гистограмму спектра света на первом промежутке времени *T*. Затем рассматривают второй промежуток времени *T* с реальной зависимостью светового поля от времени. Чтобы найти спектр для этого второго промежутка времени *T*, реальную зависимость светового поля от времени опять заменяют на периодическую зависимость с периодом *T*. Только теперь на этом периоде световое поле совпадает с реальным световым полем на втором промежутке времени *T*. Опять вычисляют ряд Фурье. Квадраты модулей коэффициентов ряда Фурье — гистограмма спектра на втором промежутке времени *T*. И так далее. Получается возможность рассмотрения зависимости спектра от времени.

Если промежуток времени *T* выбрать слишком коротким, то спектр будет слишком бедным, в нем будет слишком мало подробностей. Если же промежуток времени *T* выбрать слишком длинным, то спектр будет определен в слишком редкие моменты времени.

Если квадрат модуля Фурье амплитуды умножить на некоторый коэффициент:

$$I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2,$$

то I_m окажется интенсивностью света на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$. Можно доказать, что общая интенсивность света $I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m$. Набор интенсивностей I_m удобно называть и называют спектром света. В этом определении спектр света — это некоторая гистограмма.

<u>Факультативная вставка.</u>

Выразим интенсивность света через среднее значение квадрата напряженности, а напряженность подставим в виде ряда Фурье.

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\vec{E}(t),\vec{E}(t)\right)\right\rangle_t =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_m e^{-i\omega_m t}, \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{\vec{E}}_k e^{-i\omega_k t}\right)\right\rangle_t$$

Вынесем комплексные экспоненты за знак скалярного произведения и получим

$$I = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{-i\omega_m t}\cdot\left(e^{-i\omega_k t}\right)^*\right\rangle_t \cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right) = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m,k=-\infty}^{+\infty}\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t\cdot\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_k\right)$$

Если частоты ω_k и ω_m не совпадают, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = 0$, так как $e^{i(\omega_k-\omega_m)t}$ — комплексное число единичной длины, которое вращается на комплексной плоскости с угловой скоростью $\omega_k-\omega_m$. Если же частоты совпадают $\omega_k=\omega_m$, то $\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = 1$. Тогда

$\left\langle e^{i(\omega_k-\omega_m)t}\right\rangle_t = \delta_{km}$ — дельта символ Кронекера. Тогда

$$I = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\vec{E}}_m,\tilde{\vec{E}}_m\right) = \frac{cn}{16\pi\mu}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{\vec{E}}_m\right|^2.$$

Учтем, что $\left|\tilde{\vec{E}}_{-m}\right| = \left|\tilde{\vec{E}}_m\right|$, так как $\tilde{\vec{E}}_{-m} = \tilde{\vec{E}}_m^*$ и получим

$$I = \frac{cn}{16\pi\mu}E_0^2 + \frac{cn}{8\pi\mu}\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2.$$

Сравним это выражение с выражением интенсивности через вещественную амплитуду светового поля E_0:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2.$$

Вещественная амплитуда равна модулю комплексной амплитуды, тогда $I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$.

Введем для интенсивности на нулевой частоте определение: $I_0 \equiv \frac{cn}{16\pi\mu}E_0{}^2$, тогда интенсивность света $I = \frac{cn}{16\pi\mu}E_0^2 + \frac{cn}{8\pi\mu}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ можно выразить, как сумму интенсивностей по положительным частотам:

$$I = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m .$$

Особняком при рассмотрении спектра стоит излучение абсолютно черного тела (формула Планка). Здесь тоже есть два варианта. Под спектром понимают либо спектральную плотность объемной плотности энергии электромагнитного поля:

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1},$$

либо энергию, которую излучает поверхность нагретого абсолютно черного тела. В этом случае под спектром понимают спектральную плотность энергии излучаемой единицей площади поверхности абсолютно черного тела в единицу времени:

$$\frac{c\cdot w_\nu(T)}{4} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}.$$

Кроме того $w_\omega = \frac{1}{2\pi}w_\nu$, что дает еще две формулы для спектра излучения абсолютно черного тела.

Конец факультативной вставки.