Факультатив. Теорема Парсеваля.

Если рассмотреть два выражения для поверхностной плотности энергии светового поля:

$$G=\int_{0}^{+\infty} G_\omega\, d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} I(t)\,dt,$$

где G_ω — спектр света или энергия, которая падает на единичную площадку перпендикулярную направлению света в единичном интервале циклических частот, $I(t)$ — зависимость интенсивности света от времени. То из этого равенства можно получить теорему Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{E}_0(\nu)\right|^2 d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\,dt,$$

где $\tilde{\vec{E}}_0(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i2\pi\nu t}\cdot dt$.

Или, если вместо нашего определения $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$ положить, что $\tilde{\vec{E}}_0(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt$, то получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t)\,dt.$$

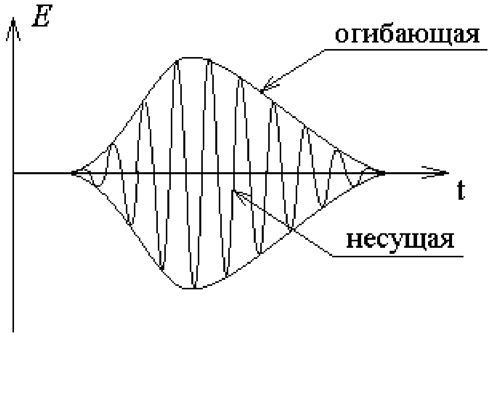
Это та же теорема Парсеваля.

Заметим, что в математике теорема Парсеваля доказана не для преобразования Фурье, а для более общего случая унитарного преобразования.

Экзамен. Спектр огибающей светового импульса и спектр самого импульса.

Рассмотрим световое поле в одной пространственной точке. Пусть для простоты свет линейно поляризован. Тогда можно не следить за направлением светового поля $\vec{E}(t)$, а рассматривать только его величину.

Рассмотрим световой импульс.



Огибающая светового импульса — медленно меняющаяся амплитуда поля.

Несущая — синусоида с частотой заполнения огибающей. Косинусоида — это та же синусоида только со сдвигом фазы на $\frac{\pi}{2}$, поэтому косинусоиды для благозвучия тоже будем называть синусоидами.

Световой импульс — произведение двух функций: медленной огибающей и синусоиды несущей частоты.

Огибающую можно представить, как сумму нескольких синусоид, то есть в виде Фурье разложения.

Рассмотрим простейший вариант огибающей, которая состоит из одной синусоиды с частотой Ω_0:

$A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$.

Пусть несущая имеет оптическую частоту ω_0:

$\cos(\omega_0 t)$, где $\Omega_0 << \omega_0$.

Тогда

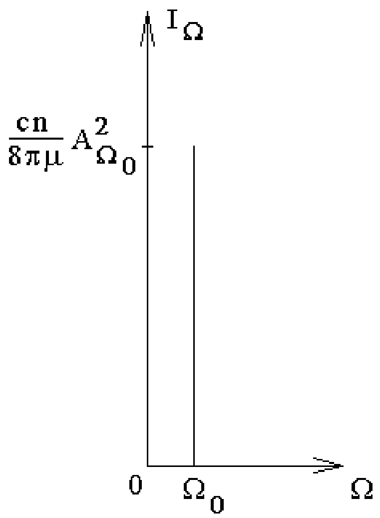
$$E(t) = A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t) = \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0+\Omega_0)t) + \frac{A_{\Omega_0}}{2}\cos((\omega_0-\Omega_0)t).$$

Оказалось, что свет состоит из синусоид двух частот: $(\omega_0+\Omega_0)$ и $(\omega_0-\Omega_0)$. Амплитуда каждой из них $\frac{A_{\Omega_0}}{2}$ вдвое меньше амплитуды A_{Ω_0} огибающей $A_{\Omega_0}\cos(\Omega_0 t)$, а интенсивность вчетверо меньше, как квадрат амплитуды: $I = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2$.

Рассмотрим три спектра. Для простоты будем считать, что частоты Ω_0 и ω_0 кратны одной и той же малой частоте ω_1. Тогда световое поле является периодической функцией с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Периодическое световое поле можно разложить в ряд Фурье. Будем под спектром света понимать совокупность интенсивностей Фурье компонент I_m. Для светового поля отличными от нуля окажутся интенсивности только двух компонент ряда Фурье с положительными частотами $\omega_0-\Omega_0$ и $\omega_0+\Omega_0$. В спектре огибающей окажется отличной от нуля интенсивность только одной компоненты с положительной частотой Ω_0. Амплитуды Фурье компонент будут совпадать с амплитудами соответствующих синусоид, а интенсивности компонент будут связаны с амплитудами обычными соотношениями вида $I = \frac{cn}{8\pi\mu}A^2$.

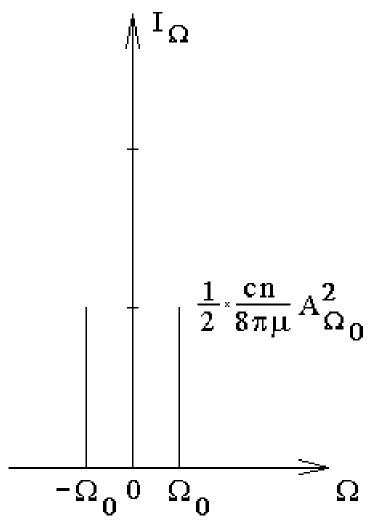
Рассмотрим гистограммы трех спектров.

1).



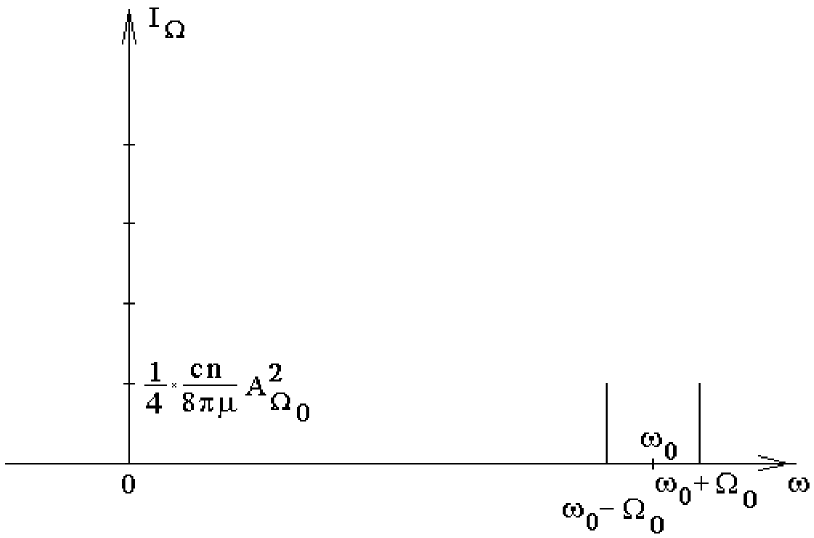
Спектр огибающей, который в рассматриваемом случае состоит из одной спектральной линии.

2).



Спектр огибающей в частотах обоих знаков. При этом чтобы суммарная интенсивность осталась без изменения, и интенсивность была бы равна сумме интенсивностей, нужно считать, что на каждую из этих двух частот приходится половина всей интенсивности.

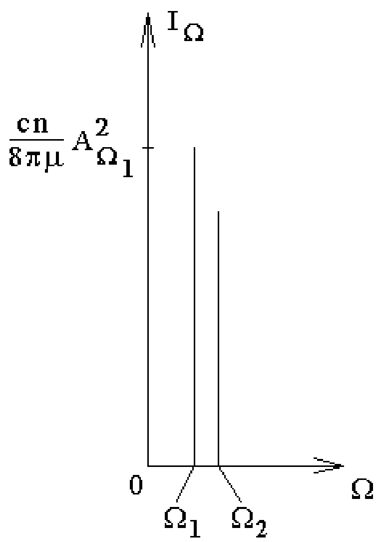
3).



Спектр светового импульса представляет собой спектр огибающей обоих знаков, сдвинутый на частоту несущей ω_0. Интенсивности линий спектра становятся еще вдвое меньше.

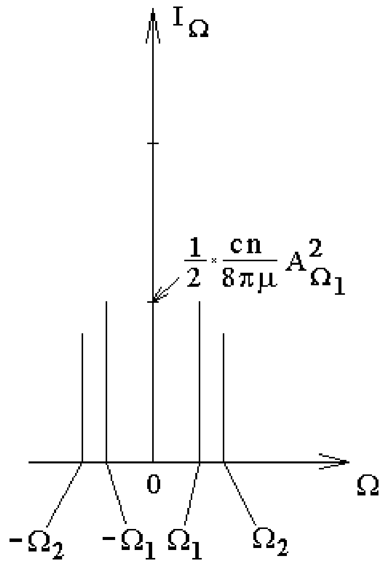
Причина еще одного коэффициента $\dfrac{1}{2}$ вызвана тем, что световой импульс в сравнении с огибающей имеет сомножитель $\cos(\omega_0 t)$, а интенсивность при этом имеет сомножитель $\left\langle \cos^2(\omega_0 t)\right\rangle_t = \dfrac{1}{2}$.

Обсудим теперь огибающую светового импульса, в спектре которой содержится несколько частот, например две:

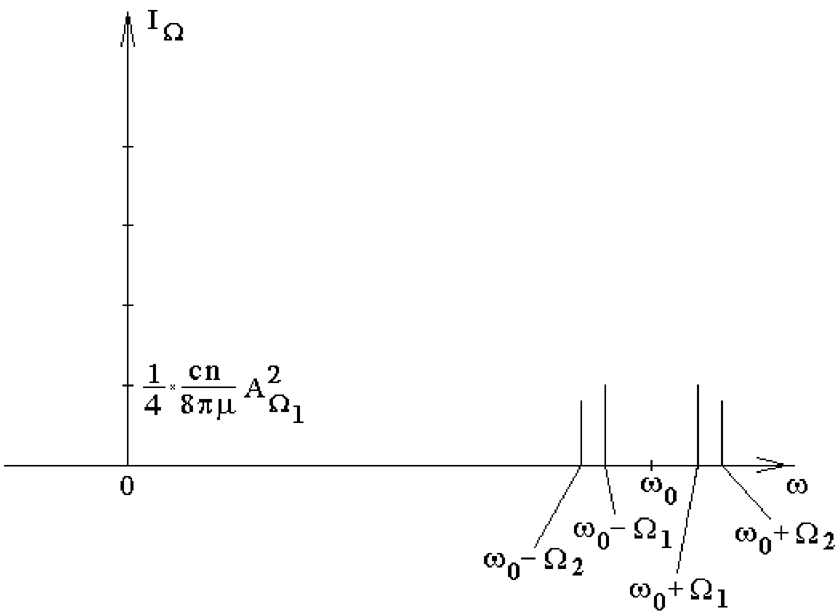


.

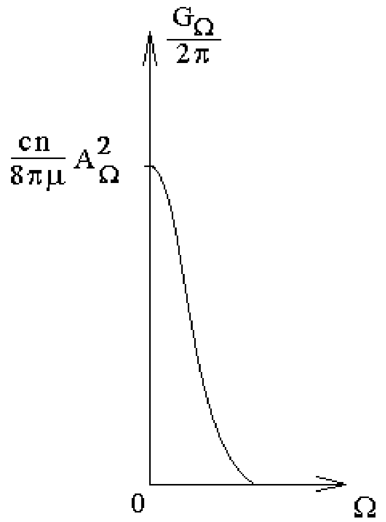
Спектр огибающей в частотах обоих знаков будет иметь вдвое меньшие интенсивности:



Спектр светового импульса будет подобен спектру огибающей, но еще вдвое ниже и сдвинут на частоту несущей:

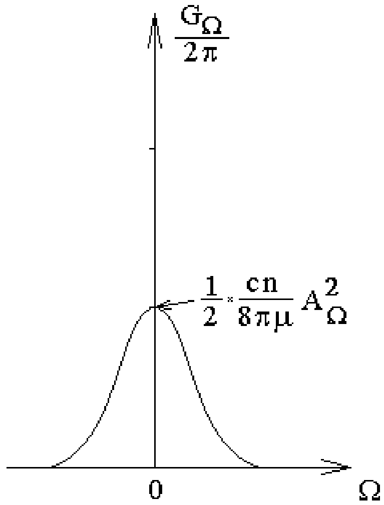


Обычно огибающую светового импульса можно разложить только в непрерывный спектр:

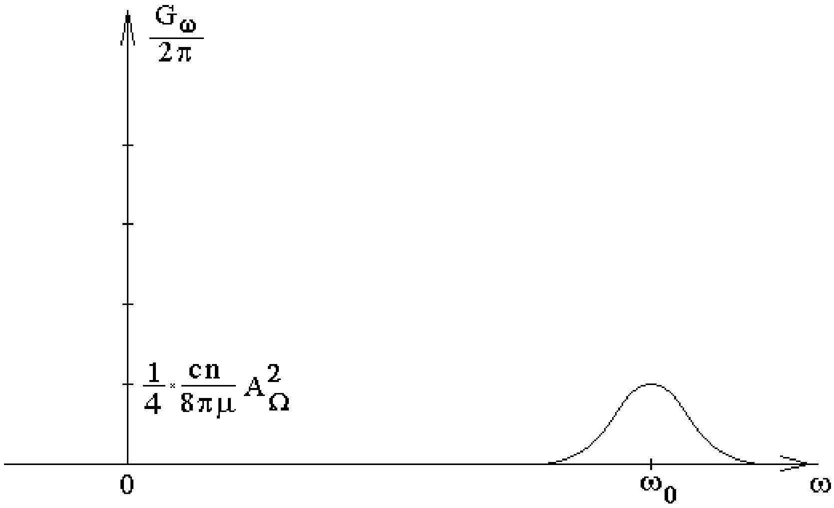


Здесь $G_\omega = 2\pi \dfrac{cn}{8\pi\mu} \left| \tilde{E}_0(\omega) \right|^2$ — спектр света или спектральная плотность поверхностной плотности энергии, $\left| \tilde{E}_0(\Omega) \right| = A_\Omega$ — модуль Фурье образа огибающей.

Спектру положительных частот можно сопоставить уполовиненный по высоте спектр частот обоих знаков:



При этом спектр светового импульса по форме совпадает со спектром огибающей, но оказывается еще вдвое ниже и сдвинут по оси абсцисс на величину равную несущей частоте:



Для краткости говорят, что спектр светового импульса — это спектр огибающей импульса, сдвинутый на частоту несущей. То, что спектр огибающей рассматривается в частотах обоих знаков, и то, что сдвинутый спектр вдвое уменьшается по амплитуде, подразумевается, но не озвучивается.

Экзамен. Соотношение неопределенности частоты и времени (без доказательства).

Опираясь только на свойства преобразования Фурье можно доказать, что спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega$ и его длительность Δt связаны приблизительным соотношением:

$\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$.

Обычно под спектральной шириной импульса понимают ширину его спектрального контура G_ω на половине высоты (на половине максимального значения G_ω). Аналогично под длительностью импульса можно понимать ширину контура $I(t)$ на половине его высоты.

Это неравенство означает, что короткий световой импульс обязан иметь широкий спектр, а почти монохроматическое световое поле не может быть кратковременным.

Если короткий световой импульс пропустить через узкополосный светофильтр, спектральная ширина пропускания которого $\Delta\omega$ мала, то свет на выходе светофильтра длится долго (длительность импульса Δt — велика). Если свет с постоянной амплитудой пропустить через затвор, который открывается на короткий промежуток времени, то после затвора спектр света становится широким.

Факультативная вставка.

Приблизительное неравенство $\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$ можно заменить точным неравенством:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \ge \frac{1}{2}.$$

Для точного неравенства $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$ нужно строго определить величины $\Delta\omega$ и Δt. Заметим, что для того чтобы величина $\frac{1}{2}$ была точной границей неравенства необходимо, чтобы у светового импульса была несущая частота. То есть спектр частот импульса должен быть сдвинут далеко от нулевой частоты.

Здесь $\Delta\omega = \sqrt{\left\langle \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 \right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение частоты ω в распределении светового импульса по частотам от средней частоты $\langle\omega\rangle$ светового импульса.

Аналогично, $\Delta t = \sqrt{\left\langle \left(t - \langle t\rangle\right)^2 \right\rangle}$ — среднеквадратичное отклонение времени t прохождения частей импульса через фиксированную точку пространства от среднего времени $\langle t\rangle$ или времени прохождения центра тяжести импульса.

$$\Delta\omega = \sqrt{\left\langle \left(\omega - \langle\omega\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \omega^2 - 2\omega\langle\omega\rangle + \langle\omega\rangle^2 \right\rangle} =$$
$$= \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle - 2\langle\omega\rangle\langle\omega\rangle + \langle\omega\rangle^2} = \sqrt{\left\langle \omega^2 \right\rangle - \langle\omega\rangle^2}$$

Аналогично:

$$\Delta t = \sqrt{\left\langle \left(t - \langle t\rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle t^2 \right\rangle - \langle t\rangle^2}\,.$$

Средняя частота светового импульса — это частота, усредненная с весом пропорциональным спектральной плотности поверхностной плотности энергии светового импульса $G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0(\omega)\right|^2$, где $\tilde{E}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(t)\cdot e^{i\omega t}dt$ — Фурье образ светового поля $E(t)$. При таком усреднении величина $\frac{G_\omega d\omega}{G}$ играет роль вероятности того, что частота лежит в интервале от ω до $\omega + d\omega$. Сумма этих вероятностей равна единице, так как $G = \int\limits_0^{+\infty} G_\omega\, d\omega$. Среднее значение любой величины равно сумме или интегралу по всем вариантам состояний от произведения усредняемой величины на вероятность состояния. Тогда

$$\langle\omega\rangle=\int\limits_0^{+\infty}\omega\,\frac{G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty}G_\omega d\omega}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат частоты:

$$\left\langle\omega^2\right\rangle=\int\limits_0^{+\infty}\omega^2\,\frac{G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega^2 G_\omega d\omega}{G}=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\omega^2 G_\omega d\omega}{\int\limits_0^{+\infty}G_\omega d\omega}.$$

Через эти два средних значения и выражается спектральная ширина светового импульса $\Delta\omega=\sqrt{\left\langle\omega^2\right\rangle-\langle\omega\rangle^2}$.

При вычислении среднего времени прохода светового импульса через фиксированную точку пространства нужно время усреднить с весом пропорциональным мгновенному значению интенсивности света $I(t)$ внутри светового импульса. Роль вероятности того, что время (импульса) лежит в интервале от t до $t+dt$ играет величина $\dfrac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t')\,dt'}$.

Тогда

$$\langle t\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\,\frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t')\,dt'}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t\,I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t)\,dt}.$$

Аналогично можно найти средний квадрат времени:

$$\left\langle t^2\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,\frac{I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t')\,dt'}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,I(t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}I(t)\,dt}.$$

Через эти две средние величины выражается длительность светового импульса:

$$\Delta t=\sqrt{\left\langle t^2\right\rangle-\langle t\rangle^2}.$$

Повторим, что среднеквадратичные отклонения $\Delta\omega$ и Δt связаны соотношением $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$. Равенство $\Delta\omega \cdot \Delta t = \frac{1}{2}$ достигается только в том случае, когда спектр импульса представляет собой гауссову функцию частоты $\sim e^{-2\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2}$, а огибающая импульса — гауссова функция времени $\sim e^{-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$ (интенсивность — гауссова функция вида $\sim e^{-2\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2}$).

В оптике часто оказывается, что среднеквадратичное отклонение частоты от средней частоты бесконечно: $\Delta\omega = \infty$. В таком случае неравенство в форме $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$ становится неинформативным. Но неравенство $\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$, где $\Delta\omega$ и Δt ширина половине высоты соответствующих контуров, по-прежнему имеет смысл.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

<u>Факультатив. Соотношение неопределенности Гейзенберга.</u>

Рассмотрим соотношение неопределенности частоты и времени в сочетании с выражением для энергии фотона:

$$\begin{cases} \Delta\omega \cdot \Delta t \geq \dfrac{1}{2} \\ E = h\nu = \hbar\omega \end{cases}.$$

Умножим первое равенство на $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ и с учетом второго равенства получим:

$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ — соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени, справедливое как для фотона, так и любой другой частицы.

Это соотношение означает, что нельзя одновременно и точно знать и время возможной регистрации фотона, и ожидаемую энергию фотона при его регистрации.

Чем точнее будет известно время регистрации фотона, тем больше неопределенность в энергии фотона. Это следует из того, что для точного определения момента необходимо, чтобы световой импульс был коротким. При этом спектр импульса автоматически, на основе свойств преобразования Фурье, оказывается широким. Энергия фотона пропорциональна частоте, поэтому и энергия регистрируемого фотона оказывается в состоянии с большой неопределенностью.

Заметим, что аналогичное соотношение неопределенности можно написать для координаты и импульса. При этом нужно рассмотреть свет не в одной пространственной точке во все моменты времени, а во всем пространстве в один момент времени.

Любую ограниченную в пространстве и времени волну можно представить, как суперпозицию плоских монохроматических волн.

Рассмотрим выражение для фазы плоской монохроматической волны любой природы:

$$\varphi = \left(\vec{k}, \vec{r}\right) - \omega t + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0 .$$

В это выражение произведение $-\omega t$ входит, точно также как произведение $k_x x$. Если свойства преобразования Фурье по временной координате t приводят к соотношению

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}, \text{ то}$$

свойства преобразования Фурье по пространственной координате x обязаны приводить к соотношению

$$\Delta k_x \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2} .$$

Умножим это соотношение на $\hbar$ и получим

$$\Delta\left(\hbar k_x\right) \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} .$$

Рассмотрим импульс фотона

$$p = mV = mc = \frac{mc^2}{c} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar\frac{\omega}{c} = \hbar k \qquad => \qquad p = \hbar k \qquad =>$$

$$p_x = \hbar k_x .$$

Тогда соотношение неопределенности для x координаты примет вид:

$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \dfrac{\hbar}{2}$ — это тоже соотношение неопределенности Гейзенберга только для координаты и проекции импульса.

Эти соотношения неопределенности $\begin{cases} \Delta E \cdot \Delta t \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta p_x \cdot \Delta x \geq \dfrac{\hbar}{2} \end{cases}$ справедливы не только для фотона, но и для любой другой частицы, так как согласно предположению де Бройля (в квантовой механике) каждая частица одновременно является волной, для которой частота и длина волны связаны с энергией и импульсом частицы соотношениями:

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k = \dfrac{h}{2\pi} \cdot \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda} \cdot \end{cases}$$

Любопытно, что согласно теории вторичного квантования (подробнее в последней лекции за 2010г.) фаза светового поля и число фотонов тоже не могут быть одновременно строго определены, то есть подчиняются некоторому соотношению неопределенности.

Интерференция.

Экзамен. Явление интерференции. Ширина полос. Видность.

Говорят, что волны интерферируют, если интенсивность суммарной волны не равна сумме интенсивностей:

$$I \neq \sum_m I_m .$$

Световые волны разных частот не интерферируют. Поясним это.

Световое поле известно только на ограниченном интервале времени T. Всегда с достаточной точностью можно заменить реальную зависимость напряженности светового поля от времени периодической функцией времени с периодом T. Тогда все частоты в ее Фурье разложении кратны некоторой малой частоте $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а свет разных частот можно рассматривать, как разные компоненты этого ряда Фурье.

Мы уже обсуждали, что для ряда Фурье справедливо равенство $I = \sum_m I_m$, где $I_m = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_m\right|^2$ — интенсивность светового поля на частоте $\omega_m = m\frac{2\pi}{T}$, $\tilde{\vec{E}}_m = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T \vec{E}(t)\cdot e^{i\omega_m t}dt$ — коэффициенты разложения ряда Фурье. То есть при усреднении за бесконечное время $I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t$ световые волны разных частот не интерферируют $I = \sum_m I_m$.

При наблюдении интерференции подразумевается, что складываются почти однонаправленные световые волны. Только для таких волн определено понятие интенсивности.

Интерференцию наблюдают на экране, который ставят почти перпендикулярно лучам.

На экране образуются светлые и темные полосы.

Ширина интерференционных полос — расстояние между центрами соседних светлых полос.

$V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ — определение видности интерференционной картины. Здесь $I_{\max}$ — интенсивность в максимуме интенсивности светлой полосы (в середине светлой полосы), $I_{\min}$ — интенсивность в минимуме интенсивности (в середине темной полосы).

$0 \le I_{\min} \le I_{\max}$ =>

$0 \le V \le 1$.

$V = 0$ <=> $I_{\max} = I_{\min}$ — отсутствие интерференционных полос.

$V = 1$ <=> $I_{\min} = 0$ — максимальный контраст интерференционных полос.

Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн ортогональных поляризаций.

Две поляризации света будем называть ортогональными, если единичные векторы поляризаций ортогональны:

$\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0$.

Например, для света, направленного вдоль оси z, ортогональны поляризации по декартовым осям

$\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y\right) = 0$,

ортогональны и две круговые поляризации

$\left(\vec{e}_+, \vec{e}_-\right) = 0$, где

$\begin{cases} \vec{e}_+ = \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \vec{e}_- = \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} \end{cases}$, где $\vec{e}_+$ — единичный вектор левой круговой поляризации, $\vec{e}_-$ — единичный вектор правой круговой поляризации.

Выразим интенсивность света через комплексную амплитуду света $\tilde{\vec{E}}_0$:

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{8\pi\mu}E_0^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_0\right|^2 = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right).$$

Рассмотрим две световые волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении $\vec{k}$:

$$\tilde{\vec{E}}(t) = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} =$$

$$= \left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right)\cdot e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{E}_0\vec{e}_p e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right)}.$$

Подставим в выражение $I = \dfrac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right)$ для интенсивности комплексную амплитуду в виде $\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}$ и получим:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{\vec{E}}_0, \tilde{\vec{E}}_0\right) = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}, \tilde{E}_{01}\vec{e}_{p1} + \tilde{E}_{02}\vec{e}_{p2}\right) = \frac{cn}{8\pi\mu}\cdot$$

$$\cdot\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{01}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{01}^*\left(\vec{e}_{p2}, \vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^*\left(\vec{e}_{p2}, \vec{e}_{p2}\right)\right\}.$$

Учтем, что поляризации ортогональны $\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p2}\right) = 0$ и получим:

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left\{\tilde{E}_{01}\tilde{E}_{01}^{*}\left(\vec{e}_{p1}, \vec{e}_{p1}\right) + \tilde{E}_{02}\tilde{E}_{02}^{*}\left(\vec{e}_{p2}, \vec{e}_{p2}\right)\right\} = \frac{cn}{8\pi\mu}\left(\left|\tilde{E}_{01}\right|^2 + \left|\tilde{E}_{02}\right|^2\right) = I_1 + I_2$$

=> $I = I_1 + I_2$ =>

Ортогональные поляризации не интерферируют.

Экзамен. Интенсивность света при сложении двух световых волн одинаковой поляризации, как функция разности фаз.

Мы докажем формулу для интенсивности суммарной волны в случае линейной поляризации света. Для любой другой поляризации формула будет такой же.

Рассмотрим две световые волны в одной и той же пространственной точке:

$E_1(t) = E_{01}\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $E_2(t) = E_{02}\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Напряженность суммарного светового поля равна сумме напряженностей двух световых полей:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_{01}\cos(\omega t + \varphi_1) + E_{02}\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Подставим это в выражение для интенсивности света

$$I = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle E^2(t)\right\rangle_t = \frac{cn}{4\pi\mu}\left\langle\left(E_1(t) + E_2(t)\right)^2\right\rangle_t =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left(\left\langle E_1^2(t)\right\rangle_t + 2\left\langle E_1(t)E_2(t)\right\rangle_t + \left\langle E_2^2(t)\right\rangle_t\right) =$$

и получим

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\cdot\left\{E_{01}^2\left\langle\cos^2(\omega t + \varphi_1)\right\rangle_t + 2E_{01}E_{02}\left\langle\cos(\omega t + \varphi_1)\cdot\cos(\omega t + \varphi_2)\right\rangle_t\right\} +$$

$$+ \frac{cn}{4\pi\mu}\cdot\left\{E_{02}^2\left\langle\cos^2(\omega t + \varphi_2)\right\rangle\right\} =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2} + E_{01}E_{02}\left\langle\cos(2\omega\cdot t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right\rangle_t + E_{02}^2\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{cn}{4\pi\mu}\left\{E_{01}^2\frac{1}{2} + E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + E_{02}^2\frac{1}{2}\right\} =$$

$$= \frac{cn}{8\pi\mu}\left(E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) =$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Окончательно получаем:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi),$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз интерферирующих волн с одинаковой поляризацией и с интенсивностями I_1 и I_2.

Часто интенсивность суммарной световой волны выражают через оптическую разность хода, которая связана с разностью фаз соотношением $\Delta = \lambda \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$. Тогда

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(2\pi\frac{\Delta}{\lambda}\right).$$

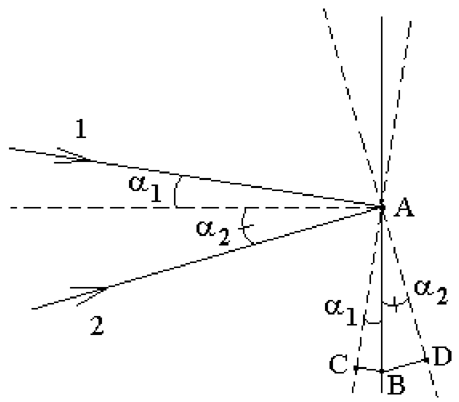
Экзамен. Связь ширины интерференционных полос и угла между интерферирующими волнами.

Обычно при рассмотрении интерференции два интерферирующих луча и нормаль к экрану находятся в одной плоскости. Только такой вариант мы и будем рассматривать.

Докажем, что для малых углов между нормалью к экрану и каждым лучом ширину интерференционных полос можно найти по формуле:

$$d = \frac{\lambda}{\alpha},$$

где α — угол между интерферирующими лучами, d — ширина интерференционных полос.



Пусть в точку A на экране две световые волны 1 и 2 приходят в одинаковой фазе. Тогда точка A — середина светлой полосы. Для простоты будем считать, что для точки A оптическая разность хода интерферирующих волн равна нулю, а не просто кратна длине волны λ.

В точках A и C фазы первой световой волны равны, так как эти точки находятся на одной поверхности равных фаз, перпендикулярной лучу 1.

Аналогично в точках A и D фазы второй световой волны равны.

Тогда фаза 1-ой волны в точке C равна фазе 2-ой волны в точке D, так как фазы двух волн одинаковы в точке A. Соответствующая разность хода для точек C и D равна нулю.

Волна 1 еще не дошла до точки B на отрезок CB. Волна 2 уже прошла точку B на отрезок BD.

Тогда разность хода Δ волн 1 и 2 для точки B будет равна:

$$\Delta = CB + BD = AB\cdot\sin(\alpha_1) + AB\cdot\sin(\alpha_2) =$$

$$= AB\cdot(\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)) \approx AB\cdot(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha\cdot AB, \text{ где}$$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ — угол между лучами 1 и 2.

Итак

$\Delta \approx \alpha \cdot AB$.

Пусть AB — ширина интерференционных полос

$AB = d$.

Разность хода при переходе от одной светлой полосы к соседней светлой полосе изменяется на длину волны λ. Тогда при переходе от точки A к точке B разность хода изменяется на:

$\Delta = \lambda$.

Сравнивая это с равенством $\Delta \approx \alpha \cdot AB = \alpha \cdot d$, получаем:

$\lambda = \alpha \cdot d$ =>

$$d = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

Интересно, что ширина полос зависит только от угла между интерферирующими волнами и не зависит от любых других особенностей оптической схемы получения интерференции.

<u>Экзамен. Интерференция лазерных и интерференция нелазерных источников света.</u>

Все источники света делятся на два класса: лазерные и нелазерные.

Рассмотрим сначала интерференцию лазерных источников света.

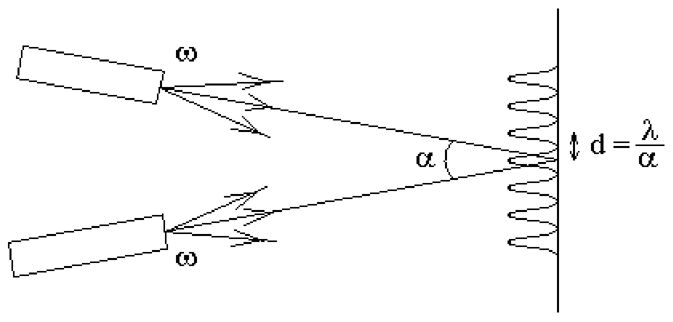
Для лазерного источника света излучение любых двух атомов усиливающей среды когерентно.

Источники света называются когерентными, если их свет способен интерферировать.

$I \neq \sum_m I_m$ — условие интерференции.

Для лазерных источников света даже излучение двух разных лазеров способно интерферировать. Интенсивность света при этом не постоянна, а испытывает биения, осциллирует, на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$, где ω_1 и ω_2 — частоты генерации двух рассматриваемых лазеров.

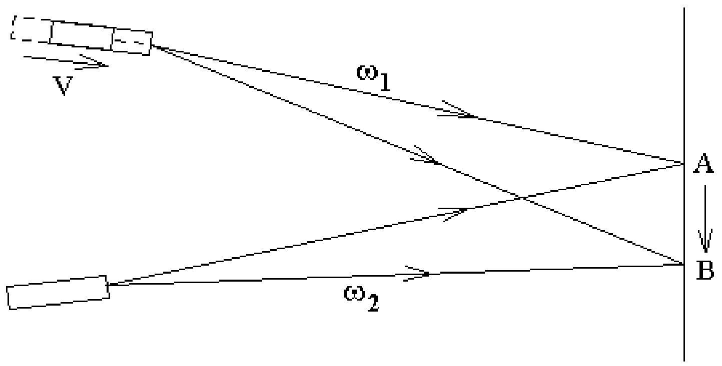
Рассмотрим два лазера, которые излучают широкие пучки света с одинаковой частотой ω и в одинаковой фазе.



На экране будут интерференционные полосы с шириной $d = \dfrac{\lambda}{\alpha}$.

Пусть некоторая точка экрана одинаково удалена от лазеров, и излучение в этой точке синфазно — разность фаз равна нулю. В этой точке будет середина светлой полосы, так как разность хода Δ для нее равна нулю $\Delta = 0$.

Что изменится, если верхний лазер начать двигать навстречу экрану со скоростью V?



Точка одинаково удаленная от лазеров начнет перемещаться вниз по экрану от точки A к точке B. Если верхний лазер остановить, то в этой точке B будет находиться середина светлой полосы, так как разность хода для нее равна нулю $\Delta = 0$.

Вместе с нулевой полосой, для которой $\Delta = 0$, и остальные интерференционные полосы будут двигаться вниз по экрану.

Будем считать, что частота излучения движущегося лазера в его собственной системе отсчета не изменяется во время движения и по-прежнему равна ω.

В неподвижной системе отсчета, связанной с экраном, частота излучения верхнего лазера изменилась из-за эффекта Доплера:

Новая частота верхнего лазера в лабораторной системе отсчета равна $\omega_1 \approx \omega + \dfrac{V}{c}\omega$ при условии $V << c$, когда достаточно учитывать только линейный эффект Доплера.

Частота нижнего лазера ω_2 по-прежнему сохраняется равной ω.

В фиксированной точке экрана интенсивность света осциллирует с частотой $\omega_1 - \omega_2$. Эти осцилляции можно объяснить, как изменение разности хода Δ, или как результат сложения волн с разными частотами. Это два описания одного и того же эффекта.

Следовательно, при интерференции двух световых волн с разными частотами ω_1 и ω_2 интерференционные полосы бегут по экрану. Полосы движутся вниз при условии $\omega_1 > \omega_2$.

Разность частот двух одинаковых неподвижных лазеров всегда шумит, то есть изменяется случайным образом в небольших пределах. При этом

интерференционная картина на экране дрожит, смещаясь шумовым образом то вверх, то вниз.
