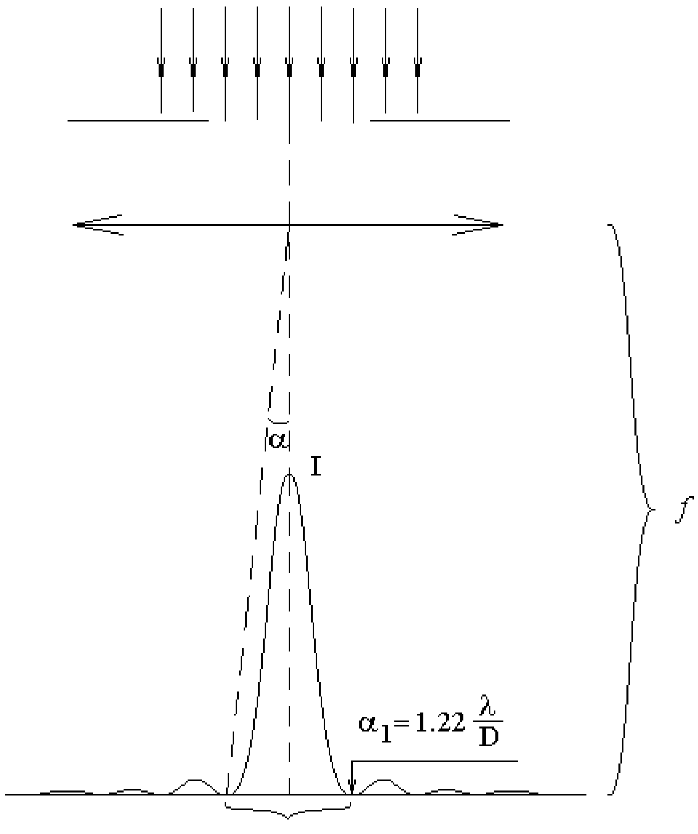
Экзамен. Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Дифракция Фраунгофера — это дифракция, наблюдаемая на бесконечно удаленном экране.

Дифракционную картину, локализованную на бесконечности, можно наблюдать в фокальной плоскости линзы. Если диаметр линзы заметно больше диаметра отверстия, то расстояние от отверстия в экране до линзы не изменяет вида дифракционной картины.



Если длина волны света λ гораздо меньше диаметра отверстия D, то угловой радиус первого темного кольца дифракционной картины равен $\alpha_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}$. Соответствующий диск внутри первого темного кольца дифракционной картины называют диском Эйри.

Факультативная вставка.

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, а интеграл Френеля (интеграл Кирхгофа, но без коэффициента наклона) для амплитуды поля при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии можно выразить через функцию Бесселя. В результате для интенсивности в зависимости от угла дифракции получается следующее выражение:

$$I(\alpha) = I_0\left(\frac{2J_1(U)}{U}\right)^2, \text{ где}$$

$$U = \frac{1}{2}kD \cdot \sin(\alpha),$$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,

D — диаметр отверстия,

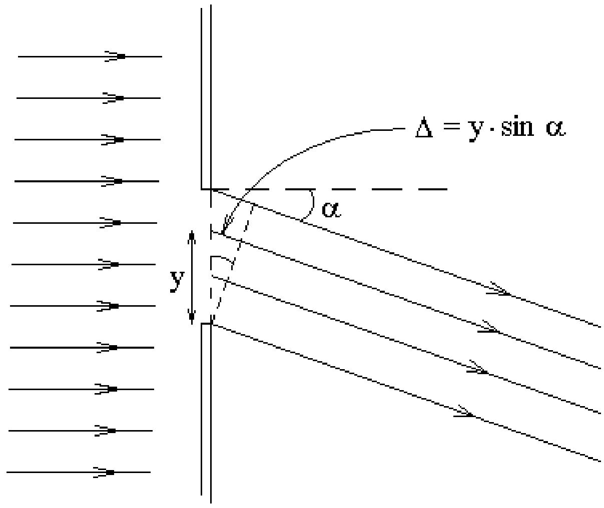
I_0 — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции $\alpha = 0$,

$J_m(z) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\left(mt - z\cdot\sin(t)\right)\cdot dt$ — функция Бесселя с целочисленным значком $m = 0,1,2,...$. Это одно из возможных эквивалентных определений функции Бесселя.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Дифракция Фраунгофера на одной щели.

Напомним, что дифракция Фраунгофера наблюдается на бесконечно удаленном экране.



Пусть перпендикулярно экрану со щелью падает плоская монохроматическая световая волна.

Мысленно разобьем площадь щели на вторичные источники света в виде тонких полосок вдоль щели.

Рассмотрим вторичный источник света, находящийся на расстоянии y от нижнего края щели. Рассмотрим излучение этого источника в направлении, которое составляет угол α с нормалью к экрану. Все лучи, идущие в направлении α, пересекаются на бесконечно удаленном экране. Нас интересуют именно такие лучи, так как дифракционная картина при наблюдении дифракции Фраунгофера локализована на бесконечности, и расстояние до экрана не только гораздо больше ширины щели, но и гораздо больше ее длины.

Точки пунктирной линии, наклоненной вправо от вертикали на угол α, находятся на одинаковом удалении от точки экрана, в которой пересекается параллельный пучок лучей, дифрагирующий на щели под углом α. Тогда

$\Delta = y\cdot\sin(\alpha)$ — разность хода между лучом, который проходит щель на высоте y, и лучом, который проходит через нижний край щели.

Для малых углов дифракции α не будем учитывать зависимость коэффициента наклона от α:

$$-\frac{i}{2\lambda}\left(1+\cos(\alpha)\right) \approx -\frac{i}{\lambda}.$$

Для экрана, удаленного от щели на большое расстояние $r >> D$, где D — ширина щели, можно считать, что множитель $\frac{1}{r}$ в интеграле Кирхгофа постоянен $\frac{1}{r} \approx const$, не зависит от y-координаты полоски вторичного источника.

Найдем зависимость комплексной амплитуды поля $\tilde{E}$ от угла дифракции α только с точностью до коэффициента пропорциональности, поэтому постоянные сомножители в выражении для амплитуды нас интересовать не будут.

В соответствии с теорией дифракции Кирхгофа (как и с теорией дифракции Френеля):

$$\tilde{E}(\alpha) = \frac{1}{D} \cdot \int_0^D \tilde{E}_0 \cdot e^{ik(\Delta + r_0)} \cdot dy.$$

Здесь отброшен коэффициент наклона $-\frac{i}{2\lambda}\left(1+\cos(\alpha)\right) \approx -\frac{i}{\lambda}$, так как постоянный сомножитель для нас несущественен. Вместо элемента площади dS вторичного источника под интегралом стоит сомножитель dy, который надо было бы умножить на длину щели, этот постоянный множитель нам не важен, поэтому мы его не учитываем. Отброшен и сомножитель $\frac{1}{r} \approx const$, где r — расстояние от щели до экрана. Сомножитель e^{ikr} теории Кирхгофа заменен нами сомножителем $e^{ik(\Delta + r_0)}$, где $r = \Delta + r_0$. Здесь r_0 — расстояние от нижнего края щели до точки на экране, где сходятся лучи, дифрагирующие под углом α. Все отброшенные постоянные сомножители собраны в сомножитель $\frac{\tilde{E}_0}{D}$, где D — ширина щели, введенная в выражение для согласования размерностей левой и правой частей равенства.

$$\tilde{E}(\alpha) = \frac{1}{D} \cdot \int_0^D \tilde{E}_0 \cdot e^{ik(\Delta + r_0)} \cdot dy = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{D} \cdot \int_0^D e^{iky \cdot \sin(\alpha)} \cdot dy$$

Здесь в последнем равенстве учтено, что $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$.

$$\tilde{E}(\alpha) = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{D} \cdot \int_0^D e^{iky \cdot \sin(\alpha)} \cdot dy =$$

$$= \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{ikD \cdot \sin(\alpha)} \cdot \int\limits_0^{ikD\cdot\sin(\alpha)} e^{iky\cdot\sin(\alpha)} \cdot d\left(iky \cdot \sin(\alpha)\right) =$$

$$= \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{ikD \cdot \sin(\alpha)} \left(e^{ikD\cdot\sin(\alpha)} - 1\right)$$

Введем обозначение

$$U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha).$$

Тогда

$$\tilde{E}(\alpha) = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{2iU} \cdot \left(e^{2iU} - 1\right).$$

Перейдем от комплексной амплитуды к интенсивности света: $I(\alpha) \sim \left|\tilde{E}(\alpha)\right|^2$.

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left|\frac{e^{2iU} - 1}{2iU}\right|^2 = I_0 \cdot \left|\frac{\cos(2U) + i \cdot \sin(2U) - 1}{2iU}\right|^2 =$$

$$= I_0 \cdot \frac{\left(1 - \cos(2U)\right)^2 + \sin^2(2U)}{4U^2} = I_0 \cdot \frac{1 - 2\cos(2U) + \cos^2(2U) + \sin^2(2U)}{4U^2} =$$

$$= I_0 \cdot \frac{2 - 2 \cdot \cos(2U)}{4U^2} = I_0 \cdot \frac{2 - 2\cos^2(U) + 2\sin^2(U)}{4U^2} =$$

$$= I_0 \cdot \frac{2\sin^2(U) + 2\sin^2(U)}{4U^2} = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2$$

Окончательно для дифракции Фраунгофера на одной щели получаем зависимость интенсивности света I от угла дифракции α:

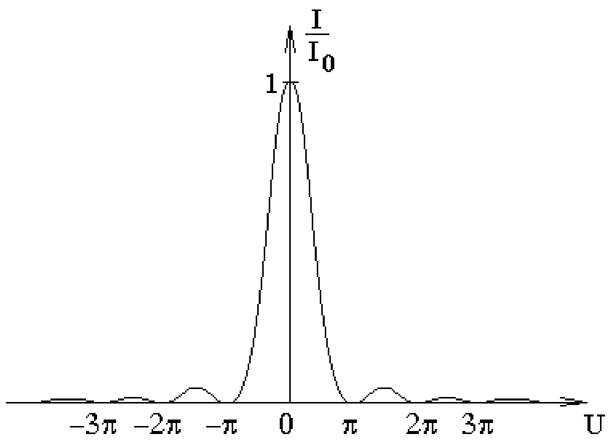
$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(U)}{U}\right)^2,$$

где I_0 — интенсивность света в направлении нулевого угла дифракции $\alpha = 0$,

$U \equiv \frac{1}{2} kD \cdot \sin(\alpha)$,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,

D — ширина щели.



Найдем величину угла дифракции α, соответствующую первой темной полосе.

$I(\alpha)=0 \quad => \quad \sin(U)=0 \quad => \quad U=\pi \quad => \quad \frac{1}{2}kD\cdot\sin(\alpha)=\pi \quad =>$

$\alpha \approx \frac{2\pi}{kD}=\frac{\lambda}{D}$.

Большая часть света при дифракции на щели идет в угол $2\frac{\lambda}{D}$, где D — ширина щели. При дифракции света на любом препятствии характерный угол дифракции равен $\frac{\lambda}{D}$, где D — размер препятствия. Так напомним, что при дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца $\alpha = 1.22\cdot\frac{\lambda}{D}$.

Рассмотрим теперь задачу дифракции Фраунгофера на одной щели графически в виде векторных диаграмм на комплексной плоскости амплитуд.

Разобьем щель на тонкие полоски вторичных источников.

Пусть y — высота расположения полоски относительно нижнего края щели. Если полоски имеют равную ширину δy, то разность хода от соседних полосок $\delta\Delta$

$\delta\Delta = \delta y\cdot\sin(\alpha)$,

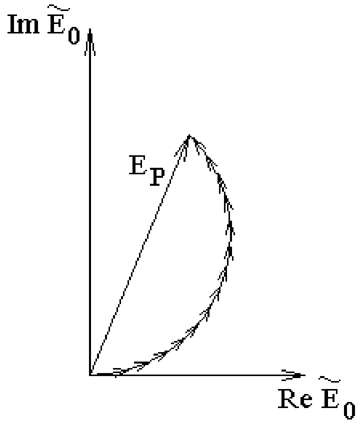
что следует из выражения $\Delta = y\cdot\sin(\alpha)$ для разности хода между лучом, который проходит щель на высоте y, и лучом, который проходит через нижний край щели.

Разность фаз связана с разностью хода соотношением $\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}$, тогда

$\delta(\Delta\varphi) = 2\pi\frac{\delta\Delta}{\lambda}$.

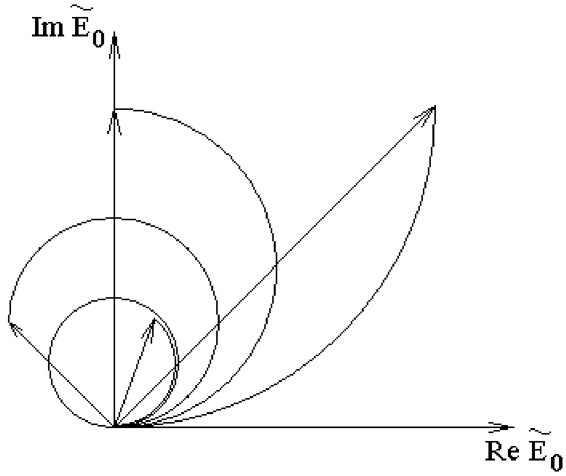
Подставим сюда $\delta\Delta = \delta y\cdot\sin(\alpha)$ и получим

$$\delta(\Delta\varphi) = 2\pi \frac{\delta y \cdot \sin(\alpha)}{\lambda}$$ — одинаковый фазовый сдвиг вкладов соседних полосок в комплексную амплитуду в точке наблюдения. Фазовый сдвиг равен углу поворота вектора на комплексной плоскости сложения амплитуд. С учетом этого картина сложения амплитуд на комплексной плоскости — дуга окружности:



При изменении угла дифракции α вклад в суммарную амплитуду $\tilde{E}_P$ каждой из полосок щели не изменяется по величине, но поворачивается из-за изменения фазы вклада в точке наблюдения. При этом дуга на комплексной плоскости несколько сворачивается без изменения своей длины.

На следующем рисунке приведены картины сложения амплитуд на комплексной плоскости для разных направлений дифракции α.



Первый ноль амплитуды и интенсивности дифрагированного света соответствует дуге, свернувшейся в окружность. При этом разность фаз вкладов в комплексную амплитуду в точке наблюдения первой и последней полосок равен $\Delta\varphi = 2\pi$. Такой разности фаз соответствует разность хода

$\Delta = \lambda$.

Подставим это в выражение $\Delta = y \cdot \sin(\alpha)$, и, учитывая, что для последней полоски $y = D$, получим

$\lambda = D \cdot \sin(\alpha)$ => $\alpha \approx \dfrac{\lambda}{D}$ — величина угла дифракции для первой темной полосы.

Полторы окружности на комплексной плоскости сложения амплитуд соответствуют первому после нулевого максимуму зависимости интенсивности от угла дифракции. Две окружности — второй ноль интенсивности и т. д.

Экзамен. Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии.

Пусть a и b — размеры отверстия по осям x и y. Тогда комплексная амплитуда в точке наблюдения с точностью до постоянного сомножителя будет иметь следующий вид:

$$\tilde{E}_P = \frac{1}{ab} \cdot \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot \tilde{E}_0 e^{ikr'},$$

где сомножитель $\dfrac{1}{ab}$ добавлен для согласования размерности; $\vec{r}\,'$ — вектор, направленный из вторичного источника в плоскости отверстия в точку наблюдения.

Пусть точка с координатами $x = 0$ и $y = 0$ находится в углу прямоугольного отверстия. Пусть $\vec{r}$ — вектор из этого угла в произвольную точку отверстия. Пусть $\vec{r}_0$ — вектор из того же угла в точку наблюдения дифракционной картины. Тогда

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0 - \vec{r} \quad => \quad kr' = \left(\vec{k}, \vec{r}\,'\right) = \left(\vec{k}, \vec{r}_0\right) - \left(\vec{k}, \vec{r}\right) \quad =>$$

$$\tilde{E}_0 e^{ikr'} = \tilde{E}_0 e^{i\left(\vec{k}, \vec{r}_0\right)} e^{-i\left(\vec{k}, \vec{r}\right)} = \tilde{E}_0 e^{ikr_0} e^{-i\left(k_x x + k_y y\right)}.$$

Подставим это в выражение для комплексной амплитуды $\tilde{E}_P$ в точке наблюдение и получим

$$\tilde{E}_P = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{ab} \cdot \int_0^a e^{-ik_x x} dx \cdot \int_0^b e^{-ik_y y} dy = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{ab} \cdot \frac{1}{ik_x}\left(1 - e^{-ik_x a}\right) \cdot \frac{1}{ik_y}\left(1 - e^{-ik_y b}\right).$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату комплексной амплитуды

$$I = \frac{cn}{8\pi\mu}\left|\tilde{E}_P\right|^2.$$

Тогда интенсивность света в зависимости от направления дифракции $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ имеет вид:

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(U_1)}{U_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin(U_2)}{U_2}\right)^2,$$

где $U_1 = \frac{1}{2}k_x a$ и $U_2 = \frac{1}{2}k_y b$.

Факультатив. Дифракция Фраунгофера и Фурье-образ амплитудного коэффициента пропускания экрана.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на отверстии произвольной формы в плоском экране.

Для дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии

$$\tilde{E}_P = \frac{1}{ab} \cdot \int_0^a dx \int_0^b dy \cdot \tilde{E}_0 e^{ikr'}.$$

Аналогично для отверстия произвольной формы

$$\tilde{E}\left(\vec{k}\right) = \frac{1}{S} \cdot \int_S dS \cdot \tilde{E}_0 \tau\left(\vec{r}\right) \cdot e^{ikr'} = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{S} \cdot \int dx \int dy \cdot \tau\left(\vec{r}\right) \cdot e^{-i\left(k_x x + k_y y\right)},$$

где $\tilde{E}_0$ — амплитуда поля волны перед экраном, $\tau\left(\vec{r}\right)$ — амплитудный коэффициент пропускания экрана в точке с радиус-вектором $\vec{r}$, соответственно $\tilde{E}_0 \tau\left(\vec{r}\right)$ — комплексная амплитуда света прямо за экраном, $\vec{r}\,' = \vec{r}_0 - \vec{r}$ — вектор из вторичного источника с радиус-вектором $\vec{r}$ в точку наблюдения с радиус-вектором $\vec{r}_0$.

Здесь, как и раньше, начало координат выбрано в плоскости экрана, в которой лежат оси координат x, y и вектор $\vec{r}$, поэтому $\left(\vec{k}, \vec{r}\right) = k_x x + k_y y$.

$\int dx \int dy \cdot \tau\left(\vec{r}\right) \cdot e^{-i\left(k_x x + k_y y\right)}$ — двумерный Фурье-образ амплитудного коэффициента пропускания $\tau\left(\vec{r}\right)$.

Окончательно

$$\tilde{E}\left(\vec{k}\right) = \frac{\tilde{E}_0 e^{ikr_0}}{S} \cdot \int dx \int dy \cdot \tau\left(\vec{r}\right) \cdot e^{-i\left(k_x x + k_y y\right)}.$$

Распределение комплексной амплитуды по углам дифракции пропорционально Фурье-образу амплитудного коэффициента пропускания экрана.