**Экзамен. Понятие о разрешающей способности микроскопа.**

Микроскоп — это одна линза — объектив и экран.

Чтобы получить увеличенное действительное изображение предмета нужно поместить предмет близко к фокальной плоскости линзы, чуть дальше от линзы. Действительное изображение при этом получается на большом расстоянии от линзы, большом по сравнению с фокусным расстоянием линзы. Если изображение точечного источника получается очень далеко, то свет сразу за линзой имеет почти плоский фронт волны с радиусом равным расстоянию от линзы до изображения точечного источника. В таком случае свет сразу за линзой такой же, как при наблюдении дифракции Фраунгофера на круглом отверстии с диаметром равным диаметру линзы, на отверстии без линзы, при наблюдении на бесконечно удаленном экране.

Для дифракции Фраунгофера на круглом отверстии угловой радиус первого темного кольца равен:

$\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$, где $D$ — диаметр отверстия (в нашем случае диаметр линзы объектива микроскопа).

Точечный предмет дает изображение на экране в виде диска с радиусом первого темного кольца $r = L\alpha = L \cdot 1.22\dfrac{\lambda}{D}$, где $L$ — расстояние от линзы до экрана.

Этот диск изображения можно отобразить обратно в предметную плоскость по законам геометрической оптики. Любая точка в этом кружке обратного изображения в предметной плоскости дает прямое изображение, которое перекрывается с прямым изображением исходной точки, и два изображения неразличимы по критерию Рэлея.

Следовательно, разрешающая способность микроскопа $l_{\min}$ равна радиусу кружка обратного изображения точки в предметной плоскости.

$l_{\min} = f\alpha$, где $f$ — фокусное расстояние объектива микроскопа, так как расстояние от предметной плоскости до объектива близко фокусному расстоянию объектива.

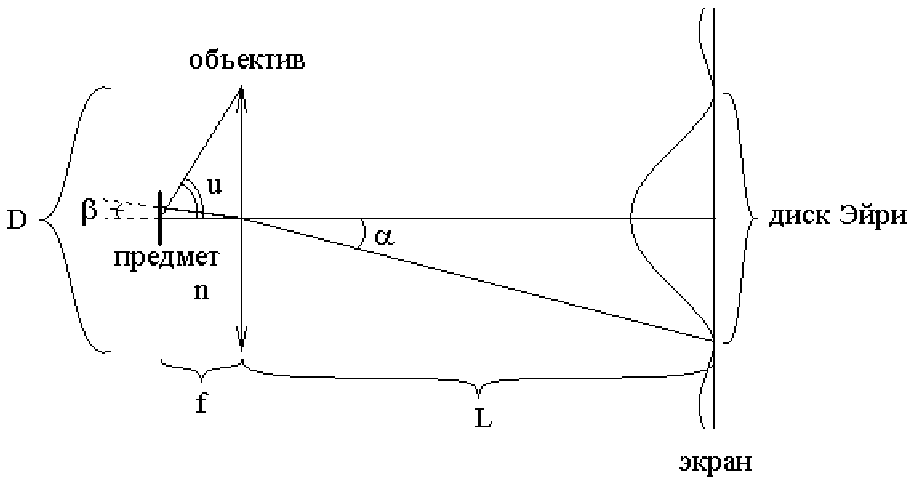
Подставим сюда угловое разрешение объектива $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ и получим

$l_{\min} = 1.22 \cdot \dfrac{\lambda \cdot f}{D}$ — разрешающая способность микроскопа или наименьшее расстояние между двумя точечными объектами, при котором они еще видны, как два объекта, а не сливаются в одно изображение. Здесь $D$ — диаметр объектива, $f$ — фокусное расстояние объектива.

---------

Сделаем некоторое уточнение.

Часто для увеличения разрешающей способности микроскопа и соответственно для уменьшения величины $l_{\min}$ большую часть пространства между объективом и линзой объектива заполняют прозрачной средой с максимально возможным показателем преломления $n$.




Здесь $f$ — фокусное расстояние объектива с учетом заполнения пространства между предметом и объективом средой с показателем преломления $n$, $D$ — диаметр объектива, $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ — угловой радиус диска Эйри дифракционной картины образованной точечным источником света в плоскости изображения.

$$n \cdot \sin(\beta) = \sin(\alpha)$$

Здесь $\beta$ — угловой размер обратного изображения по законам геометрической оптики диска Эйри в предметную плоскость.

В таком случае дифракционный предел разрешения:

$$l_{\min} = \beta f,$$

где

$$\beta \approx \sin(\beta) = \frac{1}{n}\sin(\alpha) \approx \frac{\alpha}{n} = 1.22\frac{\lambda}{nD} = 0.61\frac{\lambda}{n\frac{D}{2}} = 0.61\frac{\lambda}{nf \cdot tg(u)} \qquad =>$$

$$l_{\min} = \beta f = 0.61\frac{\lambda}{n \cdot tg(u)}.$$

Здесь $2u$ — апертура микроскопа или угол, под которым из предмета виден входной зрачок (линза объектива).

Для реального микроскопа $2u$ не является малым углом. В таком случае в первой же формуле $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ (это угловой радиус первого темного кольца дифракции Фраунгофера на круглом отверстии) была допущена некоторая неточность. Формула $\alpha = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$ справедлива, если во всех точках отверстия амплитуда светового поля одинаковая. В нашем же случае амплитуда поля на краю отверстия меньше, чем в центре отверстия, так как край отверстия находится дальше от рассматриваемого предмета в $\frac{1}{\cos(u)}$ раз. В каком-то смысле можно считать, что свет дифрагирует не на всем отверстии радиусом $\frac{D}{2}$, а только на его части примерно радиусом $\frac{D}{2}\cos(u)$. Тогда вместо полученного ранее выражения $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n\frac{D}{2}}$ получаем $\beta \approx 0.61 \cdot \frac{\lambda}{n\frac{D}{2}\cos(u)}$.

Соответственно, вместо $l_{\min} \approx 0.61\frac{\lambda}{n \cdot tg(u)}$ получаем

$$l_{\min} \approx 0.61\frac{\lambda}{n \cdot tg(u) \cdot \cos(u)} \approx 0.61\frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)}.$$

Более строгая теория разрешающей способности микроскопа (теория Аббе) дает для разрешающей способности микроскопа именно такой результат:

$$l_{\min} = 0.61\frac{\lambda}{n \cdot \sin(u)},$$

где величина $n \cdot \sin(u)$ называется числовой апертурой микроскопа.

## Взаимодействие света с веществом.
## Экзамен. Модель атома Томсона. Комплексная поляризуемость атомов.

Когда Томсон придумывал свою модель атома, еще не было известно, что в атоме есть положительное ядро. Томсон представлял себе атом, как положительную каплю объемного заряда, в которой плавают точечные электроны.

Сегодня логичнее считать наоборот. Точечное положительное ядро плавает в центре почти недеформирующегося объемного заряда электронов. Точнее электронное облако слегка смещается относительно неподвижного ядра, так как почти вся масса атома сосредоточена в его ядре.

В соответствии с этой моделью атома будем считать, что электронное облако образует шар с постоянной плотностью заряда $(-\rho)$, где $\rho > 0$. Под действием внешнего электрического поля $\vec{E}$ световой волны смещается только электронная оболочка. Электронная оболочка смещается без деформации. Со стороны ядра на оболочку действует возвращающая сила.

Составим дифференциальное уравнение для движения электронной оболочки, как целого.

Пусть $\vec{F}_1$ — сила, действующая на электронную оболочку со стороны светового поля $\vec{E}$.

$\vec{F}_1 = (-q) \cdot \vec{E}$, где $q$ — заряд атомного ядра, а $(-q)$ — заряд электронной оболочки.

Пусть $\vec{F}_2$ — сила, действующая на электронную оболочку со стороны атомного ядра. Гораздо проще найти равную ей силу, с которой электронная оболочка действует на ядро. Для этого надо найти электрическое поле однородно заряженного шара с плотностью заряда $(-\rho)$ и умножить поле на заряд ядра $q$.

Электрическое поле шара можно найти по теореме Гаусса

$\Phi_E = 4\pi Q$ => $ES = 4\pi(-\rho)V$ =>

$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (-\rho) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ => $\vec{E} = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$.

Силу, действующую на электронную оболочку со стороны ядра, мы обозначили, как $\vec{F}_2$. Тогда сила, действующая на ядро со стороны электронной оболочки, отличается знаком:

$$-\vec{F}_2 = q \cdot \vec{E} = q \cdot \left(-\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}\right) \quad =>$$

$$\vec{F}_2 = \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r}.$$

Здесь $\vec{r}$ — вектор, проведенный из центра электронной оболочки в атомное ядро. Заменим $\vec{r} \to (-\vec{r})$, тогда

$\vec{F}_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r}$ — сила, действующая на электронную оболочку со стороны ядра, $\vec{r}$ — вектор, проведенный из ядра в центр масс электронного облака.

Второй закон Ньютона для электронной оболочки атома примет следующий вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\ddot{\vec{r}},$$

где $\ddot{\vec{r}}$ — вторая производная от радиус-вектора электронной оболочки по времени или ускорение электронной оболочки.

Подставим значения $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и получим

$$-q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}$$

Добавим в уравнение движения вязкое трение в виде силы $\vec{F}_3$ пропорциональной скорости $\dot{\vec{r}}$

$$\vec{F}_3 = -2\gamma m\dot{\vec{r}}.$$

Здесь вязкое трение введено вместо потерь энергии электронной оболочки на излучение световых волн. На самом деле потери на излучение не совсем такие, но с такими потерями уравнение легче решается.

С учетом силы вязкого трения $\vec{F}_3$ уравнение движения примет следующий вид

$$-q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi\rho q\vec{r} - 2\gamma m\dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \quad =>$$

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \frac{4\pi\rho q}{3m}\vec{r} = -\frac{q}{m}\vec{E}.$$

В этом уравнении движения центра масс электронной оболочки введем обозначение

$$\omega_0^2 \equiv \frac{4\pi\rho q}{3m}$$

(системе СИ $\omega_0^2 \equiv \frac{\rho q}{3\varepsilon_0 m}$) и получим

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{q}{m}\vec{E}.$$

Рассмотрим это уравнение в комплексном виде

$$\ddot{\tilde{\vec{r}}} + 2\gamma\dot{\tilde{\vec{r}}} + \omega_0^2\tilde{\vec{r}} = -\frac{q}{m}E_0\vec{e}_p e^{-i\omega t},$$

где $\tilde{\vec{E}} = E_0\vec{e}_p e^{-i\omega t}$ — комплексное световое поле, $\vec{e}_p$ — единичный вектор поляризации светового поля.

Полученное дифференциальное уравнение линейно относительно переменной $\vec{r}$, и все коэффициенты левой части уравнения вещественны. В таком случае вещественная часть комплексного решения уравнения будет равна вещественному решению уравнения с вещественным световым полем в правой части уравнения:

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = \mathrm{Re}\left(E_0\vec{e}_p e^{-i\omega t}\right).$$

Будем искать стационарное решение комплексного уравнения с постоянной комплексной амплитудой $\tilde{r}_0$ в виде $\tilde{\vec{r}}(t) = \tilde{r}_0\vec{e}_p e^{-i\omega t}$. Подставим это решение в дифференциальное уравнение, сократим уравнение на $\vec{e}_p e^{-i\omega t}$ и получим уравнение для комплексной амплитуды $\tilde{r}_0$:

$$-\omega^2\tilde{r}_0 - 2i\omega\gamma\tilde{r}_0 + \omega_0^2\tilde{r}_0 = -\frac{q}{m}E_0 \qquad =>$$

$$\tilde{r}_0 = -\frac{\frac{q}{m}E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$$ — комплексная амплитуда колебаний электронной оболочки атома в световом поле с вещественной амплитудой $E_0$ и частотой $\omega$.

Вещественный радиус-вектор электронной оболочки при этом имеет вид

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{r}}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{r}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(-\frac{\frac{q}{m}E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}\right)\cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t}\right).$$

Эти колебания электронной оболочки атома относительно ядра атома означают колебания дипольного момента атома:

$\vec{p}(t) = (-q)\cdot\vec{r}(t)$, где $(-q)$ — заряд электронной оболочки. Такое выражение для дипольного момента получается, если воспользоваться определением $\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ и поместить начало координат в ядро атома. В таком случае в сумме остается одно слагаемое для всей электронной оболочки, как целого.

Комплексная амплитуда колебаний дипольного момента примет следующий вид

$$\tilde{p}_0 = (-q) \cdot \tilde{r}_0 = \frac{\frac{q^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}.$$

Комплексный дипольный момент $\tilde{\vec{p}}$ связан с комплексной напряженностью светового поля $\tilde{\vec{E}}$ через комплексную поляризуемость атома $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\vec{p}} = \tilde{\alpha} \tilde{\vec{E}}.$$

Тогда из соотношений $\begin{cases} \tilde{\vec{p}} = \tilde{p}_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \\ \tilde{\vec{E}} = E_0 \cdot \vec{e}_p \cdot e^{-i\omega t} \\ \tilde{\vec{p}} = \tilde{\alpha} \tilde{\vec{E}} \end{cases}$ получаем связь комплексной амплитуды дипольного момента и комплексной амплитуды светового поля

$\tilde{p}_0 = \tilde{\alpha} E_0$ =>

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{p}_0}{E_0} = \frac{\frac{q^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$$ — комплексная поляризуемость атома Томсона на частоте $\omega$, где $q$ — заряд ядра атома, $m$ — масса электронной оболочки атома.

Пусть $f$ — число электронов атома, тогда

$\begin{cases} q = fe \\ m = fm_e \end{cases}$, где $e$ — модуль заряда электрона, $m_e$ — масса электрона, тогда

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma},$$ где $\omega_0$ — резонансная частота колебаний электронной оболочки атома.

По квантовым причинам электронная оболочка атома имеет не одну, а много резонансных частот $\omega_k$.

С некоторой натяжкой можно сказать, что в разных резонансных колебаниях $\omega_k$ участвует разное, не обязательно целое, число электронов $f_k$. Тогда

$$\tilde{\alpha} = \sum_k \frac{f_k \dfrac{e^2}{m_e}}{\omega_k^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma_k}.$$

Величину $f_k$ называют силой осциллятора. Сумма всех сил осцилляторов $\sum_k f_k$ — это сумма всех электронов, участвующих в колебаниях электронной оболочки, то есть порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Однако обычно возбуждение внутренних электронов атома не рассматривают, так как они соответствуют рентгеновскому диапазону излучения. Если рассматривать возбуждение только внешнего электрона атома, то равенство $\sum_k f_k = 1$ называют правилом сумм (правилом сил осцилляторов).