

**Экзамен. Комплексный показатель преломления. Его связь с коэффициентом поглощения и вещественным показателем преломления.**  
**Закон Бугера — Ламберта — Бера.**

В начале курса мы рассматривали распространение света в прозрачной изотропной среде. Среда, поглощающая свет, отличается от прозрачной среды тем, что поляризация поглощающей среды осциллирует на оптической частоте со сдвигом фазы относительно светового поля проходящей волны. При этом для светового поля в поглощающей свет среде получается то же самое волновое уравнение только с комплексным коэффициентом. Обсудим это подробнее.

Комплексная поляризуемость атома  $\tilde{\alpha}$  означает, что осциллирующее световое поле  $\vec{E}$  наводит в атоме дипольный момент  $\vec{p}$ , осциллирующий на той же частоте, что и световое поле, но со сдвигом фазы. В таком случае вводят комплексный коэффициент пропорциональности  $\tilde{\alpha}$ , такой что  $\vec{p} = \tilde{\alpha} \vec{E}$ . Осциллирующие дипольные моменты атомов создают осциллирующую поляризацию среды  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$  — объемную плотность дипольного момента.

Поляризация осциллирует с тем же сдвигом фазы относительно светового поля  $\vec{E}$ , что и каждый дипольный момент  $\vec{p}$ . С поляризацией среды связан вектор электрической индукции  $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ . Если поляризация осциллирует с фазовым сдвигом относительно поля  $\vec{E}$ , то и вектор  $\vec{D}$  осциллирует со сдвигом фазы, хотя и с другим. Поэтому коэффициент пропорциональности между комплексными векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  — тоже комплексная величина  $\vec{D} = \tilde{\epsilon} \vec{E}$ , здесь  $\tilde{\epsilon}$  — комплексная диэлектрическая проницаемость. Как и для постоянного электрического поля, нелинейная зависимость  $\tilde{\epsilon} - 1$  от  $\tilde{\alpha}$  определяется тем, что поле, действующее на атом, отличается от среднего поля в среде.

С учетом этого эффекта получается формула Клаузиуса — Моссотти

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi N \alpha.$$

Для электрического поля на частоте  $\omega$  аналогичные рассуждения приводят к тому же соотношению между комплексной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}$  и комплексной поляризуемостью атома  $\tilde{\alpha}$ . Таким образом, формула Клаузиуса — Моссотти позволяет найти комплексную диэлектрическую проницаемость среды  $\tilde{\epsilon}$  через комплексную поляризуемость атома Томсона

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}.$$

Введем в рассмотрение еще две комплексные величины: комплексное волновое число  $\tilde{k}$  и комплексный показатель преломления  $\tilde{n}$ .

Рассматривая световое поле в прозрачной среде, мы из уравнений Максвелла вывели волновое уравнение для электрического поля  $\vec{E}$ .

Совершенно аналогично выводится волновое уравнение для случая поглощающей среды. Берем ротор от одного из уравнений системы Максвелла

$$\operatorname{rot}(\tilde{\vec{E}}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t}$$

и с учетом другого уравнения системы уравнений Максвелла

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} \cdot \operatorname{rot}(\tilde{\vec{B}}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \tilde{\vec{D}}}{\partial t}$$

получается волновое уравнение для поля  $\tilde{\vec{E}}$ :

$$\Delta \tilde{\vec{E}} - \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\vec{E}}}{\partial t^2} = 0.$$

Только теперь в этом уравнении поле  $\tilde{\vec{E}}$  и диэлектрическая проницаемость  $\tilde{\varepsilon}$  — комплексные величины.

Прямой подстановкой в это уравнение можно убедиться, что оно имеет решение в виде плоских волн

$$\tilde{\vec{E}}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i((\tilde{\vec{k}}, \vec{r}) - \omega t)},$$

$$\text{при условии } \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2 = \tilde{\varepsilon} \tilde{\mu} \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Назовем величину  $\tilde{k} \equiv \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}}$  комплексным волновым числом. Любопытно, что комплексное волновое число не является длиной комплексного волнового вектора  $\tilde{\vec{k}}$ , так как длина любого комплексного вектора — вещественное число  $|\tilde{\vec{k}}| = \sqrt{\tilde{k}_x \tilde{k}_x^* + \tilde{k}_y \tilde{k}_y^* + \tilde{k}_z \tilde{k}_z^*}$ .

Введем еще одно обозначение

$$\tilde{n} \equiv \sqrt{\tilde{\varepsilon} \tilde{\mu}} \quad \text{— комплексный показатель преломления среды. Тогда}$$

справедливо соотношение  $\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$  для комплексных  $\tilde{k}$  и  $\tilde{n}$ , точно также как и для вещественных.

$$\text{В оптике } \tilde{\mu} \approx 1. \text{ Тогда } \tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{n}^2$$

для комплексных  $\tilde{\varepsilon}$  и  $\tilde{n}$ .

Будем вещественные части комплексных чисел обозначать одним штрихом, а мнимые — двумя штрихами:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon'' \\ \tilde{k} = k' + ik'' \\ \tilde{n} = n' + in'' \\ \tilde{\alpha} = \alpha' + i\alpha'' \end{cases}.$$

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$ . Тогда  $\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = 0$  и  $\tilde{k}_z = \tilde{k}$ . Следовательно

$$\left(\tilde{k}, \tilde{r}\right) = \tilde{k}_x x + \tilde{k}_y y + \tilde{k}_z z = \tilde{k}_z z = \tilde{k} z, \text{ где } \tilde{k} \text{ — комплексное волновое число.}$$

Подставим это в решение волнового уравнения в виде плоской волны и получим

$$\tilde{E}(t, \tilde{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\left(\left(\tilde{k}, \tilde{r}\right) - \omega t\right)} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}.$$

Подставим сюда выражение для комплексного волнового числа через комплексный показатель преломления:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} n' + i \frac{\omega}{c} n'',$$

и получим

$$\tilde{E}(t, \tilde{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{i\left(\frac{\omega}{c} n' z + i \frac{\omega}{c} n'' z - \omega t\right)} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{\omega}{c} n'' z} \cdot e^{i\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t\right)}.$$

Здесь  $\vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{\omega}{c} n'' z} = \vec{E}_0(z)$  — амплитуда, зависящая от  $z$  координаты.

$$I(z) = \frac{cn}{8\pi\mu} |E_0(z)|^2 = \frac{cn}{8\pi\mu} \cdot E_0^2 \cdot e^{-2\frac{\omega}{c} n'' z} \text{ — интенсивность света, зависящая}$$

от  $z$  координаты.

Сравним это выражение с установленным на опыте законом Бугера (он же закон Бугера — Ламберта — Бера):

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\aleph z},$$

который одновременно является определением коэффициента поглощения  $\aleph$ .

Сравнивая два выражения для  $I(z)$  получим:

$$\aleph = 2 \frac{\omega}{c} n'' \text{ — коэффициент поглощения связан с мнимой частью } n''$$

комплексного показателя преломления  $\tilde{n}$ .

$$\text{Вернемся к анализу выражения } \tilde{E}(t, \tilde{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{-\frac{\omega}{c} n'' z} \cdot e^{i\left(\frac{\omega}{c} n' z - \omega t\right)}.$$

Здесь в показателе экспоненты с мнимым показателем величина  $\frac{\omega}{c} n' z - \omega t$  является фазой затухающей световой волны.

Найдем фазовую скорость этой волны или скорость движения поверхности равных фаз.

$$\frac{\omega}{c} n' z - \omega t = const \text{ — уравнение поверхности равных фаз.}$$

Считая, что  $z$  — это функция от  $t$ , возьмем производную по времени от уравнения поверхности равных фаз и получим:

$$\frac{\omega}{c} n' \frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{n'}$$

$V_{\phi} = \frac{c}{n'}$  — фазовая скорость затухающей в среде волны.

Следовательно, вещественная часть комплексного показателя преломления поглощающей свет среды играет роль обычного показателя преломления прозрачной среды.

### Экзамен. Лоренцевская форма линии поглощения. Нормальная и аномальная дисперсия света.

Упростим выражение для комплексной поляризуемости атома Томсона

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$$

на случай, когда частота света  $\omega$  близка к резонансной частоте атома  $\omega_0$ .

Введем обозначение  $\Omega \equiv \omega - \omega_0$  для расстройки частоты света относительно резонансной частоты атома.

Тогда  $|\Omega| \ll \omega_0$ .

Из равенства  $\Omega = \omega - \omega_0$  получим

$$\omega = \omega_0 + \Omega \quad \Rightarrow$$

$$\omega^2 = (\omega_0 + \Omega)^2 \approx \omega_0^2 + 2\omega_0\Omega \quad \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx -2\omega_0\Omega.$$

Тогда из равенства  $\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma}$  получаем

$$\tilde{\alpha} = \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{-2\omega_0\Omega - 2i\omega\gamma}.$$

Кроме того, с учетом  $\omega \approx \omega_0$  заменим в знаменателе  $\omega$  на  $\omega_0$  и получим:

$$\tilde{\alpha} \approx \frac{f \frac{e^2}{m_e}}{-2\omega_0\Omega - 2i\omega_0\gamma} = -\frac{f \frac{e^2}{m_e}}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{\Omega + i\gamma} = -\frac{fe^2}{2m_e\omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}.$$

Теперь получим выражение для комплексного показателя преломления  $\tilde{n}$  в относительно простом случае низкой концентрации атомов (в газе) и вблизи резонансной частоты атома Томсона.

Для начала подставим в формулу Клаузиуса — Моссотти  $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi N\alpha$

вместо  $\varepsilon$  величину  $\tilde{n}^2$  и получим формулу Лоренц — Лорентца

$$\frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \tilde{\alpha} \quad \left( \text{в СИ: } \frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} N \tilde{\alpha} \right)$$

которая связывает комплексный показатель преломления  $\tilde{n}$  и комплексную поляризуемость атома  $\tilde{\alpha}$  для любой концентрации атомов  $N$ , а не только для низкой концентрации, как в газах.

Заметим, что вдали от резонансной частоты атома показатель преломления и поляризуемость атома становятся вещественными величинами, и уравнение Лоренц — Лорентца оказывается справедливым для вещественных  $n$  и  $\alpha$  в частотной области прозрачности среды.

Рассмотрим теперь газовую среду с малой плотностью. В этом случае формулу Лоренц — Лорентца можно упростить.

При стремлении концентрации молекул к нулю  $N \rightarrow 0$  показатель преломления стремится к единице  $\tilde{n} \rightarrow 1$ , так как нулевая концентрация соответствует вакууму, и в вакууме показатель преломления равен единице.

В таком случае при малой концентрации получим:

$$\begin{cases} \tilde{n}^2 + 2 \approx 3 \\ \tilde{n} + 1 \approx 2 \end{cases}$$

Тогда из формулы Лоренц — Лорентца  $\frac{\tilde{n}^2 - 1}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \tilde{\alpha}$  получим

$$\frac{(\tilde{n} - 1)(\tilde{n} + 1)}{\tilde{n}^2 + 2} = \frac{4}{3} \pi N \tilde{\alpha} \text{ и с учетом } \begin{cases} \tilde{n}^2 + 2 \approx 3 \\ \tilde{n} + 1 \approx 2 \end{cases} \text{ получим}$$

$$\frac{(\tilde{n} - 1)2}{3} = \frac{4}{3} \pi N \tilde{\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{n} \approx 1 + 2\pi N \tilde{\alpha}.$$

Подставим сюда выражение комплексной поляризуемости атома Томсона вблизи резонансной частоты атома:

$$\tilde{\alpha} \approx -\frac{fe^2}{2m_e\omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}$$

и получим

$$\tilde{n} = 1 - \pi N f \frac{e^2}{m_e\omega_0} \cdot \frac{\Omega - i\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}.$$

Сравнивая это выражение с  $\tilde{n} = n' + in''$ , получим выражение для вещественной и мнимой частей комплексного показателя преломления:

$$\begin{cases} n' = 1 - \pi N f \frac{e^2}{m_e\omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n'' = \pi N f \frac{e^2}{m_e\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{cases}.$$

С учетом связи коэффициента поглощения с мнимой частью показателя преломления  $\aleph = 2 \frac{\omega}{c} n'' = 2\pi N f \frac{e^2}{m_e c} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2}$  и соотношения  $\omega \approx \omega_0$

получим коэффициент поглощения  $\aleph$  и вещественный показатель преломления  $n'$  для разреженной среды в частотной окрестности линии поглощения с частотой  $\omega_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \aleph = 2\pi N f \frac{e^2}{m_e c} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n' = 1 - \pi N f \frac{e^2}{m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{array} \right. \quad (\text{в СИ: } \left\{ \begin{array}{l} \aleph = N f \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \cdot \frac{\gamma}{\Omega^2 + \gamma^2} \\ n' = 1 - N f \frac{e^2}{4\varepsilon_0 m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} \end{array} \right. ).$$

Если теперь вспомнить, что в реальном атоме оказывается много резонансных частот, то коэффициент поглощения и показатель преломления будут иметь выражение в виде суммы по резонансным частотам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \aleph = 2\pi N \frac{e^2}{m_e c} \sum_k f_k \frac{\gamma_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} \\ n' = 1 - \pi N \frac{e^2}{m_e} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k} \cdot \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} \end{array} \right.$$

Здесь  $N$  — концентрация атомов,  $f_k$  — оптическая сила осциллятора на резонансной частоте  $\omega_k$ ,  $e$  — модуль заряда электрона,  $m_e$  — масса электрона,  $\gamma_k$  — коэффициент пропорциональности в выражении силы вязкого трения для описания потерь на излучение,  $\Omega_k = \omega - \omega_k$  — расстройка частоты светового поля  $\omega$  относительно частоты поглощающего свет перехода  $\omega_k$ .

Эти формулы оказываются справедливы и при рассмотрении взаимодействия света с веществом в рамках квантовой механики.

-----

Проанализируем вклад в коэффициент поглощения от одного поглощающего перехода. Коэффициент поглощения можно переписать в виде:

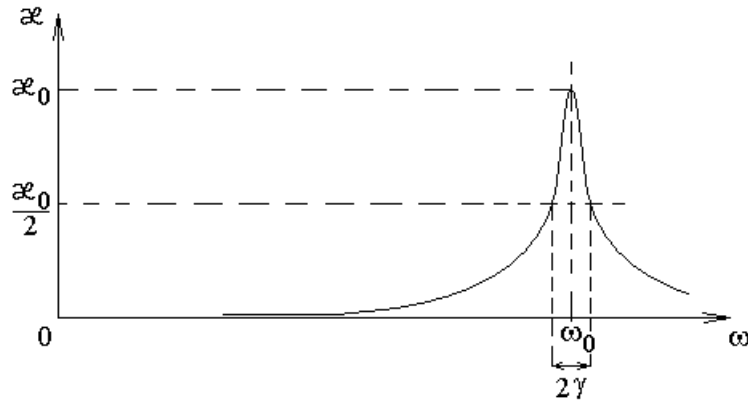
$$\aleph = \frac{\aleph_0}{1 + \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^2}, \text{ где } \aleph_0 = 2\pi \frac{e^2 f N}{m_e c \gamma}.$$

Как показывает опыт, относительная ширина спектрального контура поглощения очень мала  $\frac{2\gamma}{\omega_0} \approx 10^{-12} \div 10^{-4}$ , поэтому контур поглощения обычно

называют линией поглощения. Спектральная ширина линии поглощения примерно равна частоте столкновений молекул и поэтому сильно зависит от давления газа. С изменением давления газа спектральная ширина линий изменяется на несколько порядков.

Формуле  $\aleph = \frac{\aleph_0}{1 + \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^2}$  соответствует следующая зависимость

коэффициента поглощения от частоты света:



Здесь  $\gamma$  — полуширина на полувысоте контура линии поглощения.

В спектроскопии такой контур рассматривают очень часто. Его называют лоренцевским контуром:

$$\mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда

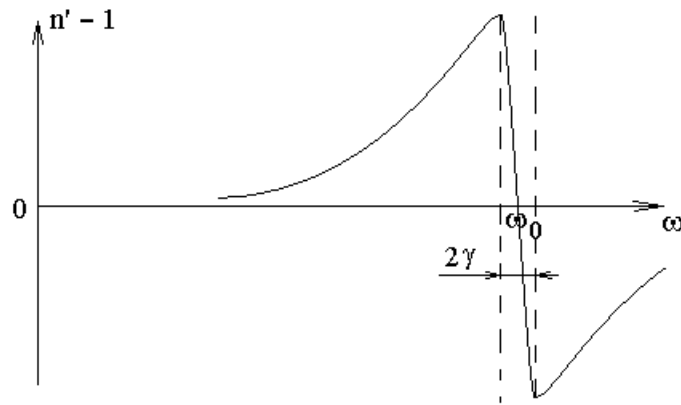
$$\aleph = \aleph_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right).$$

Рассмотрим теперь зависимость вещественного показателя преломления от частоты.

Дисперсия света — зависимость вещественного показателя преломления от частоты света или от длины волны света.

$$n' \approx 1 - \pi N f \cdot \frac{e^2}{m_e \omega_0} \cdot \frac{\Omega}{\Omega^2 + \gamma^2} = 1 - \frac{\aleph_0 \lambda_0}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\Omega}{\gamma}}{1 + \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^2},$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме на частоте поглощения  $\omega_0$ ,  $\aleph_0$  — амплитуда зависимости коэффициента поглощения от частоты света.



$$n' \approx 1 + \frac{\aleph_0 \lambda_0}{4\pi} \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right), \text{ где}$$

$$\mathcal{D}(x) \equiv -\frac{x}{1+x^2} \text{ — дисперсионный контур.}$$

Добавка к показателю преломления имеет вид дисперсионного контура.

Как видно из графика, производная почти везде положительна  $\frac{dn}{d\omega} > 0$ , кроме малой окрестности  $\Delta\omega = 2\gamma$  центра линии поглощения  $\omega_0$ .

Поэтому условие  $\frac{dn}{d\omega} > 0$  называют нормальной дисперсией, а условие  $\frac{dn}{d\omega} < 0$  называют аномальной дисперсией.

Вещество в частотной области прозрачности обладает нормальной дисперсией.

Аномальная дисперсия света наблюдается только внутри контура линии поглощения.

### **Экзамен. Однородная (лоренцевская) и неоднородная (доплеровская) ширина спектральной линии.**

Форма спектрального контура линии поглощения  $\aleph(\omega)$  совпадает с формой спектрального контура линии излучения  $G_\omega = 2\pi \frac{cn}{8\pi\mu} |E_0(\omega)|^2$  — спектральной плотности поверхностной плотности энергии. Это следует из термодинамических соображений при рассмотрении теплового равновесия излучения и вещества. На каждой частоте, сколько света поглощается столько должно и излучаться. В таком случае будем говорить просто о контуре спектральной линии.

Изолированная молекула (или атом), переходя с возбужденного уровня энергии на нижележащий уровень, излучает световой цуг  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{-i\omega_0 t}$ .



Спектр этого излучения  $G_\omega = G_0 \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right)$ , где  $\mathcal{L}(x) \equiv \frac{1}{1+x^2}$  — лоренцевский контур,  $2\gamma$  — ширина на полувысоте спектрального контура.

Если молекул много, то движение молекул изменяет ширину и форму спектральной линии. Есть две основных причины изменения ширины спектральной линии: столкновительное уширение и доплеровское уширение. Обе причины легче анализировать на примере газообразной фазы вещества.

Можно доказать, что если столкновения молекул случайным образом обрывают цуг излучения или сбивают фазу излучения, то усредненная по молекулам спектральная линия сохраняет лоренцевскую форму, но при этом изменяется ширина спектральной линии. Это так называемое однородное уширение спектральных линий, которое пропорционально частоте столкновений молекулы, которая в свою очередь пропорциональна давлению газа. В результате оказывается, что спектральная ширина линии равна  $2\gamma$ , где величина  $\gamma$  равна сумме двух слагаемых. Первое слагаемое — частота спонтанных переходов (без столкновений) с верхнего уровня энергии молекулы на нижний уровень. Второе слагаемое — частота столкновений молекулы с другими молекулами.

-----

Вторая причина изменения ширины спектральной линии — это эффект Доплера, который приводит к так называемому неоднородному уширению спектральной линии. Рассмотрим эту причину подробнее.

Если излучающая молекула летит навстречу наблюдателю, то принимаемая наблюдателем частота  $\omega$  сдвинута эффектом Доплера. С учетом только продольного эффекта Доплера получим

$$\omega = \omega' + kV_z,$$

здесь  $\omega$  — частота света в системе отсчета наблюдателя или, как говорят, в лабораторной системе отсчета;  $\omega'$  — частота света в системе отсчета излучающей молекулы,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число,  $V_z$  — проекция скорости молекулы на направление света.

Распределение Максвелла по проекции скорости имеет следующий вид:

$$N_{V_z} dV_z = \frac{N}{U\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \cdot dV_z,$$

где  $N$  — концентрация молекул;  $N_{V_z} dV_z$  — концентрация молекул, проекция скорости которых лежит в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ ;  $U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  — наиболее вероятная скорость молекул.

Каждая молекула излучает спектральную линию, форма которой имеет лоренцевский вид в ее собственной системе отсчета

$$G_{\omega'} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega' - \omega_0}{\gamma} \right)^2},$$

что в лабораторной системе отсчета с учетом доплеровского сдвига частоты можно записать, как

$$G_{\omega} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2}.$$

Складывая эти спектральные контуры с весовыми множителями, пропорциональными концентрации молекул в интервале скоростей от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ , получим суммарный контур линии излучения газа:

$$G_{\omega} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_0}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2} \cdot \frac{N}{U\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \cdot dV_z.$$

Здесь постоянный множитель  $\frac{G_0 N}{U\sqrt{\pi}}$  можно отбросить. Тогда

$$G_{\omega} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} \cdot dV_z.$$

Эту форму спектральной линии называют контуром Фойхта.

-----  
Если  $\gamma \ll kU$ , то лоренцевский контур с шириной  $2\gamma$  в шкале частот — это очень узкий контур, и в интеграле он играет роль  $\delta$ -функции Дирака.

$$\frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} \right)^2} \sim \delta\left(\frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma}\right)$$

Второй сомножитель  $e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2}$  можно вынести из-под интеграла при таком значении  $V_z$ , при котором аргумент  $\delta$ -функции равен нулю. Дело в том, что в остальных точках  $\delta$ -функция равна нулю, и величина второго сомножителя под интегралом незначительна, поэтому можно положить, что второй сомножитель — постоянная величина равная значению второго сомножителя при таком  $V_z$ , при котором аргумент  $\delta$ -функции равен нулю. Под интегралом при этом останется  $\delta$ -функция, интеграл от которой по определению равен единице.

Приравниваем аргумент  $\delta$ -функции нулю:

$$\frac{\omega - kV_z - \omega_0}{\gamma} = 0 \Rightarrow V_z = \frac{\omega - \omega_0}{k} \Rightarrow e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2} = e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{kU}\right)^2} \Rightarrow$$

$$G_\omega \sim e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{kU}\right)^2} \Rightarrow$$

$G_\omega = G_0 \cdot e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{kU}\right)^2}$  — это и есть доплеровский контур спектральной линии.

Ширина этого контура в шкале частот на уровне  $\frac{1}{e}$  равна  $\delta\omega = 2kU$ .

-----  
Если давление газа велико, то велика частота столкновений молекул и  $\gamma \gg kU$ . В этом случае роль  $\delta$ -функции Дирака под интегралом контура

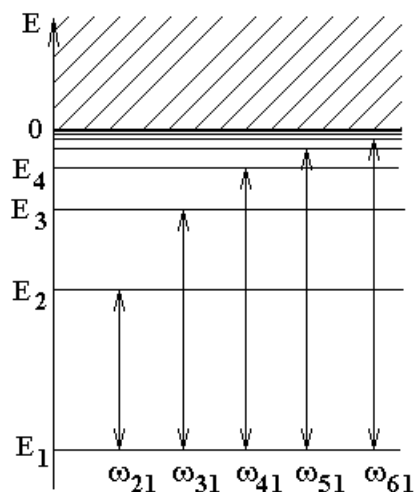
Фойхта будет играть гауссов контур  $e^{-\left(\frac{V_z}{U}\right)^2}$ . В результате форма линии поглощения при высоком давлении газа будет иметь лоренцевский контур:

$$G_{\omega'} = G_0 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma}\right)^2}.$$

### Экзамен. Причина неравенства $n > 1$ в области прозрачности среды.

Обсудим теперь неравенство  $n > 1$ , которое практически всегда справедливо в частотной области прозрачности вещества.

Рассмотрим уровни энергии произвольного атома.



Обычно атом находится на нижнем уровне энергии  $E_1$ . Поглотив квант света, атом может перейти с этого уровня на один из более высоких уровней энергии. Разность энергий уровней равна энергии кванта света и связана с его частотой  $\omega$ :

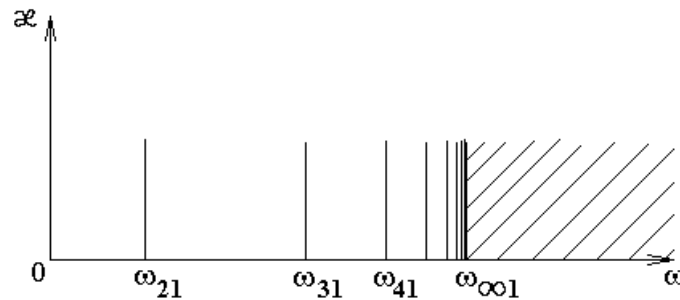
$$\hbar\omega_{k1} = E_k - E_1.$$

Частоты переходов  $\omega_{k1}$  — это и есть резонансные частоты колебаний электронной оболочки в модели атома Томсона, которые входят в выражение для комплексной поляризуемости атома:

$$\tilde{\alpha} = \sum_k \frac{f_k \frac{e^2}{m_e}}{\omega_{k1}^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma_k}.$$

Энергии электрона, привязанного к атому, дискретные и отрицательные. При приближении к нулевой энергии уровни энергии сгущаются. Около нулевой энергии находится бесконечное число отрицательных дискретных уровней энергии. Положительные энергии электрона соответствуют отрыву электрона от атома — ионизации атома. Для положительных энергий возможны все значения в непрерывном диапазоне от нуля до бесконечности.

В таком случае спектр поглощения атома или зависимость коэффициента поглощения среды от частоты имеет следующий вид:



Частотная область прозрачности среды — любая область частот вдали от линий поглощения.

Как видно из рисунка, для любой частоты света в области прозрачности справа от выбранной частоты всегда много линий поглощения, а слева — мало.

Рассмотрим влияние одной линии поглощения, расположенной справа  $\omega_{k1} > \omega$ , на показатель преломления. Из неравенства  $\omega_{k1} > \omega$  следует, что расстройка частоты света относительно частоты поглощающего свет перехода отрицательная:

$$\Omega_k \equiv \omega - \omega_{k1} < 0.$$

Тогда

$$n' = 1 - \pi N f \cdot \frac{e^2}{m_e \omega_{k1}} \cdot \frac{\Omega_k}{\Omega_k^2 + \gamma_k^2} > 1.$$

Отсюда следует положительный вклад  $n' - 1 > 0$  в показатель преломления от линии поглощения, которая расположена справа от рассматриваемой частоты света.

Поскольку справа линий много, то их суммарный вклад в показатель преломления больше, чем вклад линий, расположенных слева, и суммарный вклад положительный. В результате показатель преломления сдвигается от

единичного значения без среды в сторону увеличения при наличии среды. Поэтому в области прозрачности среды:

$$n' > 1.$$

Исключением из правила являются области частот, где одна из левых линий поглощения  $\omega_{k1} < \omega$  достаточно близка к рассматриваемой частоте света  $\omega$ , так чтобы ее отрицательный вклад в показатель преломления  $n'-1 < 0$  перевесит положительные вклады всех правых линий поглощения.

-----

Рассмотрим порядок величины вклада в коэффициент поглощения и вклада в показатель преломления при больших относительных расстройках  $x$

частоты света относительно линии поглощения  $x = \left| \frac{\omega - \omega_{k1}}{\gamma_k} \right| = \left| \frac{\Omega_k}{\gamma_k} \right| \gg 1.$

Вдали от линии поглощения при больших значениях  $x$  получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \aleph \sim \frac{1}{1+x^2} \approx \frac{1}{x^2} \\ (n'-1) \sim \left( -\frac{x}{1+x^2} \right) \approx -\frac{1}{x} \end{array} \right.$$

добавка к коэффициенту поглощения  $\aleph \sim \frac{1}{x^2}$  пренебрежимо мала при условии  $x \gg 1$ , и среда прозрачна, а добавка к показателю преломления  $(n'-1) \sim -\frac{1}{x}$  значительно больше, и поэтому, показатель преломления заметно отличается от единицы в частотной области прозрачности среды.