

Экзамен. Три формы электростатической теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi Q \\ \operatorname{div}(\vec{E}) = 4\pi\rho \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{array} \right. \quad \text{— электростатическая теорема Гаусса в интегральной,}$$

дифференциальной формах и для границы раздела.

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_l E_l dl = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{array} \right. \quad \text{— теорема о циркуляции электростатического поля } E \text{ в}$$

интегральной, дифференциальной формах и для границы раздела.

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 1. Сферическая симметрия.

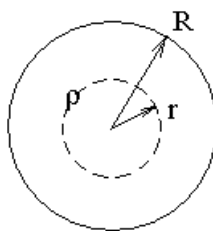
Рассмотрим задачу. Дан шар с радиусом R и объемной плотностью заряда ρ . Найти в любой точке пространства \vec{E} и φ .

Решение.

Сначала найдем поле \vec{E} , а затем φ .

Будем искать поле \vec{E} внутри шара на расстоянии r от центра шара $r \leq R$.

Рассмотрим сферу с радиусом r с центром, совпадающим с центром заряженного шара.

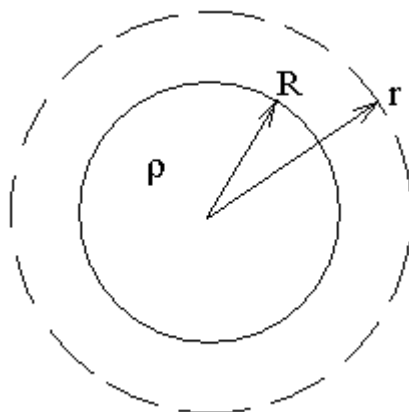


Для сферы радиусом r применим теорему Гаусса:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= 4\pi Q \quad \Rightarrow \\ E(r) \cdot S(r) &= 4\pi \cdot \rho V(r) \quad \Rightarrow \\ E \cdot 4\pi r^2 &= 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \\ E &= \frac{4}{3}\pi\rho \cdot r \quad \text{при } r \leq R \end{aligned}$$

Найдем теперь E при $r \geq R$.

Рассмотрим сферу $r \geq R$:



Для сферы $r \geq R$:

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V \quad \Rightarrow$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Здесь объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, так как только в этой части объема $\frac{4}{3}\pi r^3$ есть

заряды. Тогда

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2} \text{ при } r \geq R.$$

$$E = \frac{Q}{r^2} \text{ при } r \geq R, \text{ где } Q \text{ — полный заряд шара.}$$

Найдем теперь потенциал φ .

Сначала найдем потенциал снаружи от заряженного шара при $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r} \quad \text{при } r \geq R.$$

Теперь найдем потенциал φ внутри шара при $r \leq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^R E dr + \int_R^{\infty} E dr = \int_r^R \frac{4}{3}\pi\rho \cdot r dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\rho \cdot r^2 \Big|_r^R + \frac{4}{3}\pi\rho R^2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \quad \Rightarrow$$

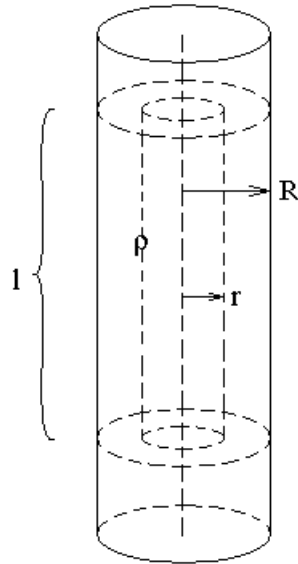
$$\varphi = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \text{ при } r \leq R.$$

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 2. Цилиндрическая симметрия.

Задача. Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R с плотностью заряда ρ . Найти поле \vec{E} .

Решение.

Чтобы найти поле E внутри заряженного цилиндра рассмотрим применение теоремы Гаусса к соосному цилиндру с радиусом $r \leq R$ и длиной l .



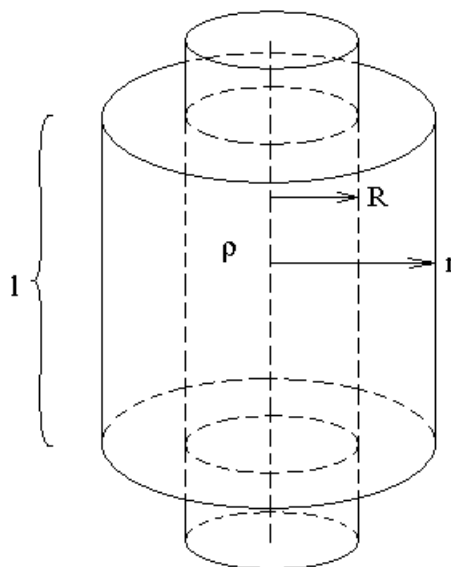
$$\Phi_E = 4\pi Q$$

$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi \rho \cdot \pi r^2 l$$

$$E = 2\pi \rho \cdot r \quad \text{при } r \leq R.$$

Найдем теперь поле \vec{E} снаружи заряженного цилиндра при $r \geq R$.
Рассмотрим цилиндр с радиусом $r \geq R$ и высотой l .



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi \rho \cdot \pi R^2 l$$

Здесь объем $V = \pi R^2 l$, так как только в этой части объема $\pi r^2 l$ есть заряды. Тогда

$$E = 2\pi \rho \frac{R^2}{r} \quad \text{при } r \geq R.$$

Факультативная вставка.

Попробуем найти потенциал φ .

Пусть точка наблюдения находится снаружи заряженного цилиндра $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_l \cdot dl = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty 2\pi \rho \frac{R^2}{r} \cdot dr = 2\pi \rho R^2 \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r} = 2\pi \rho R^2 \cdot \ln(r) \Big|_r^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, так как $\ln(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$.

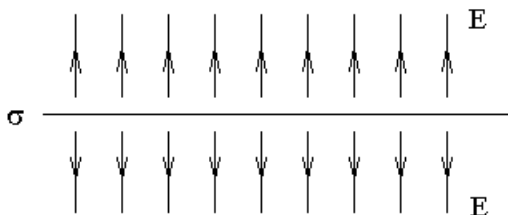
В реальном опыте потенциал не будет бесконечным, так как не бывает бесконечно длинных заряженных цилиндров.

Если h — длина заряженного цилиндра, то при $r \gg h$ цилиндр выглядит, как точечный заряд. Тогда

$$E \approx \frac{Q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx \frac{Q}{r}, \quad \text{где } Q = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h.$$

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 3. Плоская симметрия.

Бесконечная заряженная плоскость создает напряженность поля $E = 2\pi\sigma$ с каждой стороны от плоскости:



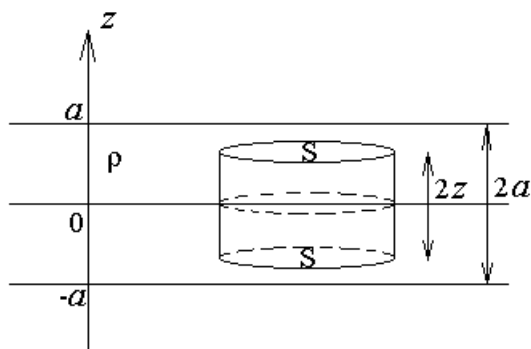
Это можно доказать, опираясь только на симметрию задачи и на скачок поля \vec{E} при переходе через заряженную поверхность: $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$.

Задача. Дан бесконечный слой толщиной $2a$ с плотностью заряда ρ . Найти поле \vec{E} .

Решение.

Сначала поищем напряженность внутри заряженного слоя при $|z| \leq a$.

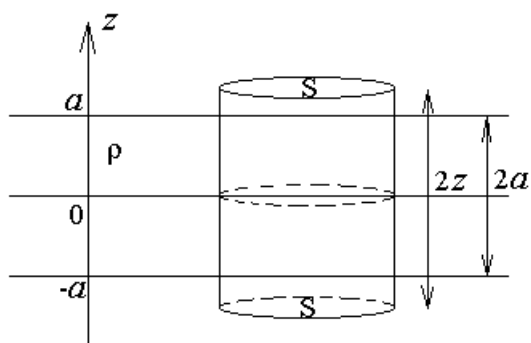
Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания S и высотой $2z$. Пусть цилиндр симметрично расположен относительно заряженного слоя.



$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho V \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho \cdot 2zS \quad \Rightarrow$$

$E_z = 4\pi\rho z$ при $|z| \leq a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Теперь найдем напряженность снаружи заряженного слоя при $|z| \geq a$.



$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho V \quad \Rightarrow \quad 2ES = 4\pi\rho \cdot 2aS \quad \Rightarrow$$

$E = 4\pi\rho a$ при $|z| \geq a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Экзамен. Дифференциальное уравнение для потенциала.

$$4\pi\rho = \operatorname{div}(\vec{E}) = \operatorname{div}(-\vec{\nabla}\varphi) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi) = -(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})\varphi = -\Delta\varphi$$

$$\Delta \equiv (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{— оператор Лапласа или лапласиан.}$$

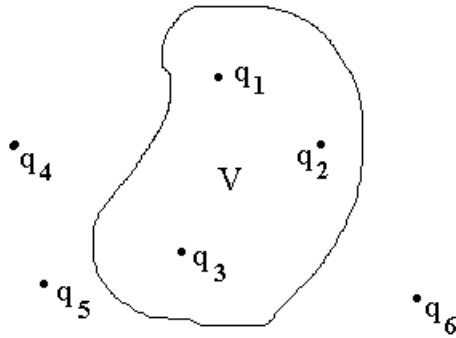
Тогда $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ — уравнение Пуассона — это и есть дифференциальное уравнение для потенциала φ .

Если $\rho = 0$, то

$\Delta\varphi = 0$ — уравнение Лапласа — уравнение для потенциала в области без зарядов.

Факультатив. Краевая задача электростатики.

Рассмотрим систему зарядов и некоторый объем V . Пусть одна часть зарядов находится внутри объема V , а другая — снаружи.



Если известно расположение всех зарядов, то потенциал в любой точке найти легко:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Пусть расположение зарядов известно только внутри объема V , но не известно за его пределами.

Какое условие для потенциала на границе объема нужно знать, чтобы можно было единственным образом найти потенциал внутри объема?

В этом и состоит краевая задача электростатики.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 1. Задача Дирихле.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V , если в каждой точке границы S объема V задан потенциал $\varphi(\vec{r})|_{\vec{r} \in S} \equiv \varphi|_S$.

Подразумевается, что в каждой точке внутри объема V задана плотность зарядов $\rho(\vec{r})$.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 2. Задача Неймана.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V , если в каждой точке границы S задана производная $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S$ от потенциала по нормали к границе и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 3. Краевая задача с границами в виде проводников.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V , если каждая граница объема — проводник, на каждой границе задан полный заряд Q_i и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Факультатив. К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.

Дифференциальное уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ с заданным потенциалом на границе $\varphi|_S$ можно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют не всегда.

Подробнее:

http://www.phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/Puasson_i_Fredgolm.pdf

Экзамен. Краевая задача электростатики. 4. Краевая задача общего вида.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V , если на каждой границе объема V задано одно из условий вида 1, 2 или 3 и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Факультатив. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2 , и для каждого из них выполнены граничные условия. Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ соответствующие двум потенциалам.

Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны. Для этого потребуется доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$, тогда из этого равенства будет следовать $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке границы выполнено условие $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$. Откуда следует, что в одной точке границы $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$. И так, производная во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а сама функция равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0$ хотя бы в одной точке. Тогда функция во всех точках объема равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)|_V = 0$ или $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$, следовательно, два решения φ_1 и φ_2 тождественны.