

Факультатив. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики (продолжение).

Вернемся к доказательству равенства $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ для всех точек объема.

С этой целью докажем два равенства:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV &= \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) \\ \oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Если мы их докажем, то получим $\int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) dV = 0$ или

$$\int_V |\vec{E}_1 - \vec{E}_2|^2 dV = 0, \text{ то есть } \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0 \text{ в каждой точке объема.}$$

Докажем сначала первое равенство системы.

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV \quad - \text{ по теореме}$$

Гаусса-Остроградского для векторного поля $(\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div}((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV = \int_V (\vec{\nabla}, (\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV =$$

Левую набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1 - \varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$\begin{aligned} &= \int_V (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2)) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2, \vec{\nabla} \varphi_1 - \vec{\nabla} \varphi_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}, \vec{\nabla})(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_2) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV + \int_V (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (-4\pi\rho - (-4\pi\rho)) \cdot dV = \\ &= \int_V (\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot dV . \end{aligned}$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0 .$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду. Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2))_{d\vec{S}} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2))_{\vec{n}} \cdot dS = \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\partial(\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial n} \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS \end{aligned}$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

1. Рассмотрим доказательство равенства $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$

для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ в любой точке границы S .

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)|_S = 0 \Rightarrow$ Первый сомножитель $(\varphi_1 - \varphi_2)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи Неймана.}$$

В краевой задаче Неймана $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}|_S = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}|_S$, следовательно, на поверхности

S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства

$$\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0 \text{ для задачи с границами в виде проводников.}$$

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\varphi|_{S_i} = const_i$, где S_i — поверхность i -го проводника границы, если граница многосвязная.

Тогда $(\varphi_1 - \varphi_2)|_{S_i} = const_i$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i -го проводника:

$$\oint_{S_i} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS =$$

$$= (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2 \Rightarrow$

$$(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-E_{1n} + E_{2n}) \cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \oint_{S_i} (-4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2) \cdot dS =$$

$$= 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\oint_{S_i} \sigma_2 dS - \oint_{S_i} \sigma_1 dS \right) = 4\pi \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (Q_{2i} - Q_{1i}).$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i -ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство $\oint_S (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) \cdot dS = 0$ будет выполнено для каждой границы, так как в краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint_S ((\varphi_1 - \varphi_2) \vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}) = 0$ доказано для краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

Экзамен. Основные свойства проводников в электростатическом поле.

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля \vec{E} течет электрический ток.

Свойства проводников.

1. $\vec{E}_{внутри} = 0$ — поле \vec{E} внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри} \neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем электрический ток.

2. $0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla} \varphi_{внутри} = 0 \Rightarrow \varphi_{внутри} = const$ - каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

$$3. \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\rho_{внутри} = \text{div}(\vec{E}_{внутри}) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho_{внутри} = 0 \Rightarrow$$

В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

$$4. \left\{ \begin{array}{l} E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_n = 4\pi\sigma$$
 - нормальная составляющая

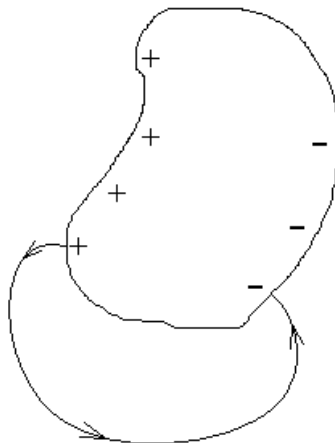
поля \vec{E} над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ , где \vec{n} — нормаль, направленная из проводника наружу.

$$5. \left\{ \begin{array}{l} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E_\tau = 0$$
 - тангенциальная

составляющая поля \vec{E} над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля \vec{E} начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля \vec{E} потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

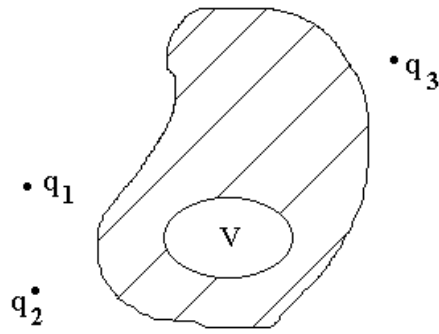
Невозможно:



Экзамен. Экранирование электростатического поля проводником.

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но не полностью.

Если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E} = 0$ независимо от того, есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0 . Тогда $\varphi|_S = \varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi|_S = \varphi_0$. Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ в объеме V , так как в этом объеме нет зарядов: $\rho = 0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi = 0$.

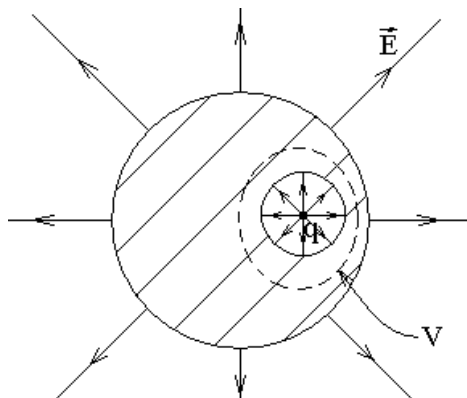
Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$$\varphi(\vec{r})|_V = \varphi_0 = const \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = 0$$

Внутри полости поле \vec{E} отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

Факультатив. Заряд внутри полости проводника.

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле \vec{E} везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V . Все точки поверхности S находятся внутри

объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле \vec{E} . Тогда и поток поля \vec{E} через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. С учетом теоремы Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$. Тогда $Q = 0$, сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Внутри объема проводника зарядов нет. Следовательно, если в полости заряд q , то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q .

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V . В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q . Во всех точках границы этого объема потенциал одинаков, так как это поверхность проводника. На этой поверхности расположен заряд $-q$. Задача сферически симметрична. Поле в этом объеме можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q , и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение —

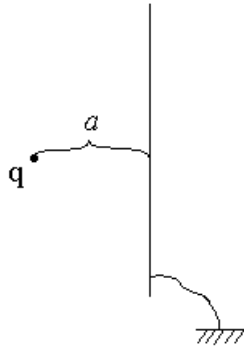
поле точечного заряда $E = \frac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле \vec{E} снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

Экзамен. Метод изображений. 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

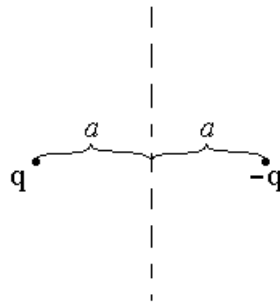
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q , расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a . Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говорится, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на опыте можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V , в котором ищут решение для потенциала. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поле \vec{E} и поле φ в левой половине пространства — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.

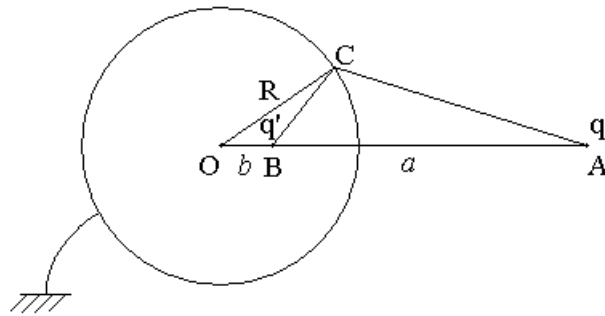
Экзамен. Метод изображений. 2. Точечный заряд и проводящий заземленный шар.

Рассмотрим задачу.

Дан проводящий заземленный шар радиусом R и точечный заряд q на расстоянии $a > R$ от центра шара. Найти потенциал φ в каждой точке пространства.

Покажем, что заряд-изображение q' на расстоянии b от центра шара вместе с реальным зарядом q удовлетворяет граничным условиям для потенциала $\varphi|_S = 0$, если

$$\begin{cases} q' = -q \frac{R}{a} \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases}.$$



$$b = \frac{R^2}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA} \quad \Rightarrow$$

$\triangle OCB \sim \triangle OAC$ — треугольники подобны, так как имеют общий угол $\angle BOC$ и прилежащие стороны треугольников пропорциональны $\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA}$.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad BC = AC \frac{R}{a}$$

Тогда

$$\varphi(C) = \frac{q}{AC} + \frac{q'}{BC} = \frac{q}{AC} + \frac{-q \frac{R}{a}}{AC \frac{R}{a}} = 0.$$

Потенциал в произвольной точке C на сфере равен нулю. Следовательно, заряды q и q' удовлетворяют граничным условиям для потенциала.

Потенциал и напряженность снаружи шара — это потенциал и напряженность пары зарядов q и q' , где

$$\begin{cases} q' = -q \frac{R}{a} \\ b = \frac{R^2}{a} \end{cases}.$$

Здесь b — расстояние от центра шара до заряда-изображения q' .