Введение.

Лектор — Крылов Игорь Ратмирович, комната Б101 физического факультета СПбГУ.

Интернет страница: igor-krylov.ru

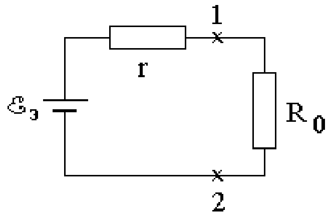
Электронная почта: igor-krylov@yandex.ru

Литература.

1. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники. М:. Мир. 1984.

Источник напряжения, внутреннее сопротивление, источник тока.

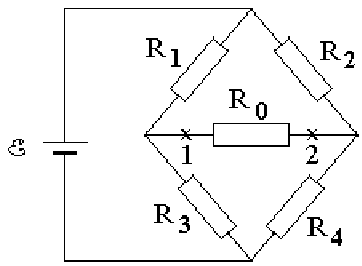
Пусть в нашем распоряжении есть произвольная схема из ЭДС и резисторов. Пусть из этой схемы торчат два провода. Обозначим их цифрами 1 и 2. Можно доказать, что при подключении к выводам 1 и 2 любого резистора сопротивлением R_0 через него пойдет ток, как будто он включен в так называемую эквивалентную схему



.

Ток можно найти по формуле $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}_э}{R_0 + r}$, где эквивалентная ЭДС $\mathcal{E}_э$ и внутреннее сопротивление r не зависят от величины нагрузки R_0.

Пусть, например, нужно найти ток I_0 через сопротивление R_0 в следующей схеме:



Величина эквивалентной ЭДС $\mathcal{E}_э$ равна напряжению на нагрузке R_0, если нагрузка имеет бесконечное сопротивление. Внутреннее сопротивление схемы r можно найти, как сопротивление между контактами 1 и 2, если каждую ЭДС схемы заменить коротким замыканием, а вместо нагрузки оставить разрыв.

Найдем напряжение на бесконечной нагрузке в первой схеме (величину эквивалентной ЭДС), как разность потенциалов в точках 1 и 2. Будем отсчитывать потенциалы относительно нижнего провода схемы. Тогда

$$\begin{cases} \varphi_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_3}{R_1 + R_3} \\ \varphi_2 = \mathcal{E}\dfrac{R_4}{R_2 + R_4} \end{cases} \quad => \quad \mathcal{E}_э = U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}\cdot\left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)$$

Сопротивление между контактами 1 и 2 первой схемы, если каждую ЭДС первой схемы заменить коротким замыканием, а вместо нагрузки оставить разрыв:

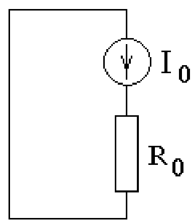
$$r = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Таким образом, можно найти величину внутреннего сопротивления любой схемы из ЭДС и резисторов.

Ток I_0 через нагрузку R_0 находим через полученные величины $\mathcal{E}_э$ и r по формуле:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_э}{R_0 + r}.$$

Отвлечемся теперь от рассмотрения данной конкретной схемы, и для какой-то другой схемы предположим, что величины $\mathcal{E}_э$ и r одновременно стремятся к бесконечности, так что их отношение стремится к некоторой величине I_0. Тогда сила тока через нагрузку R_0 будет стремиться к I_0 и не будет зависеть от величины нагрузки R_0. В этом случае говорят об источнике тока. На схемах источник тока обозначается следующим образом



.

<u>Связь тока и напряжения для линейных элементов цепи переменного тока.</u>

Для резистора:

$U = RI$

Для конденсатора:

$$\begin{cases} C \equiv \dfrac{q}{U} \\ I \equiv \dfrac{dq}{dt} \end{cases} \quad =>$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\cdot\int\limits_{-\infty}^{t} I(t')\cdot dt'$$

Для катушки индуктивности в системе СИ:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = LI \end{cases} \quad => \quad \mathcal{E}_{инд} = -L\dot{I}, \qquad \text{где } \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим реальную катушку индуктивности, как последовательно включенные идеальная катушка L и резистор R.

По закону Ома для участка цепи получаем

$U + \mathcal{E}_{инд} = RI$.

Пусть теперь катушка индуктивности почти идеальная $R \to 0$, тогда

$U = -\mathcal{E}_{инд}$.

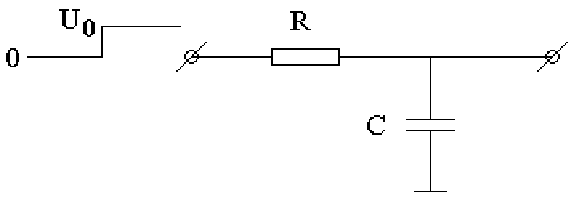
Согласно принятым правилам знаков напряжение, падающее на катушке индуктивности, отличается знаком от ЭДС индукции.

Аналогично для ЭДС любой другой природы, напряжение и ЭДС отличаются знаком.

Тогда связь тока и напряжения для линейных элементов цепи имеет вид:

$$\begin{cases} U_R = RI \\ U_C = \dfrac{1}{C} q = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} I(t')\,dt' \\ U_L = L\dot{I} \end{cases}$$

Реакция RC-цепочки на ступеньку напряжения.



Пусть резистор и конденсатор включены последовательно. На эту схему в нулевой момент времени подают ступеньку напряжения величиной U_0. Нужно найти напряжение на конденсаторе, как функцию времени.

Напомним уравнения Кирхгофа.

1). $\sum\limits_i \mathcal{E}_i = \sum\limits_i U_i$ — для любого контура.

2). $\sum\limits_i I_i = 0$ — для любого узла.

Рассмотрим уравнение $\sum\limits_i \mathcal{E}_i = \sum\limits_i U_i$ для единственного контура. Напряжение на входе можно рассматривать, как внешнюю ЭДС.

После включения ступеньки напряжения выполнено условие: $U_0 = RI + \frac{q}{C}$, которое можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно заряда q на конденсаторе с учетом того, что $I = \dot{q}$:

$$U_0 = R\dot{q} + \frac{q}{c} \qquad =>$$

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R}$$

Общее решение этого неоднородного уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.

Найдем частное решение неоднородного уравнения в виде константы.

$$q = const \quad => \quad \dot{q} = 0 \quad => \quad \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R} \quad => \quad q = CU_0 \quad —$$

частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Найдем теперь общее решение однородного уравнения

$$\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0.$$

Подставим $q = Ae^{\lambda t}$ и получим

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{\lambda t}\right) + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\lambda t}\right) = 0 \quad => \quad \lambda + \frac{1}{RC} = 0 \quad => \quad \lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC}q = 0$ имеет вид

$$q = Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Общее решение неоднородного уравнения $\dot{q} + \frac{1}{RC}q = \frac{U_0}{R}$ имеет вид суммы частного решения неоднородного уравнения $q = CU_0$ и общего решения $q = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ однородного уравнения:

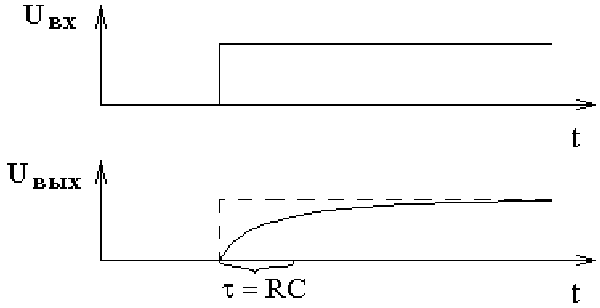
$q = CU_0 + A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$, здесь A — произвольная константа интегрирования.

Найдем константу A из условия $U_C(0) = 0 \quad => \quad q(0) = 0 \quad =>$

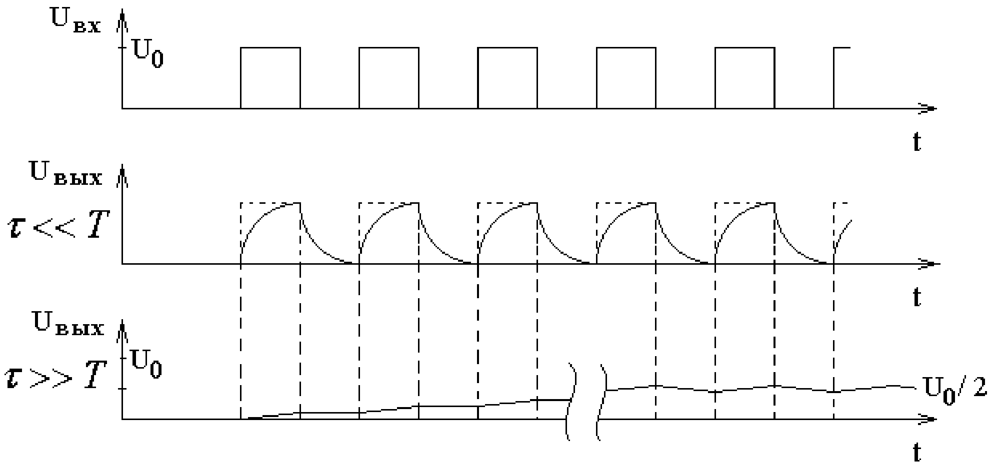
$$0 = CU_0 + Ae^{-\frac{0}{RC}} \quad => \quad A = -CU_0 \quad =>$$

$$q = CU_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad =>$$

$$U_{вых} = \frac{q}{C} = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$, где произведение $RC = \tau$ называют постоянной времени RC-цепочки.

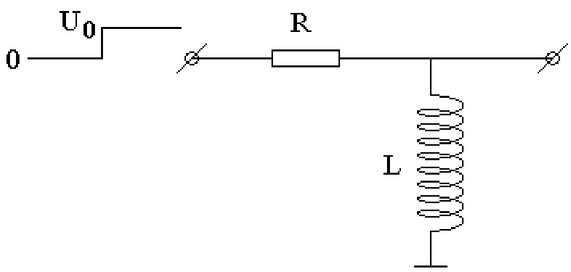


Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов, то

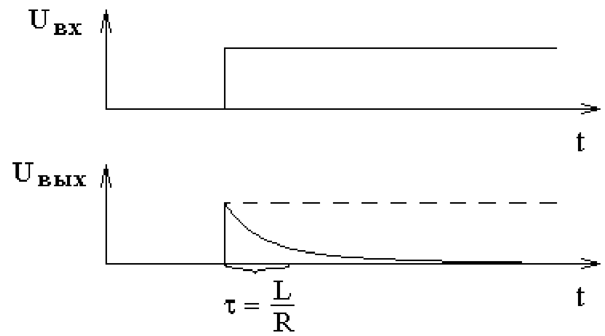


Здесь T — период прямоугольников, $\tau = RC$ — постоянная времени RC-цепочки.

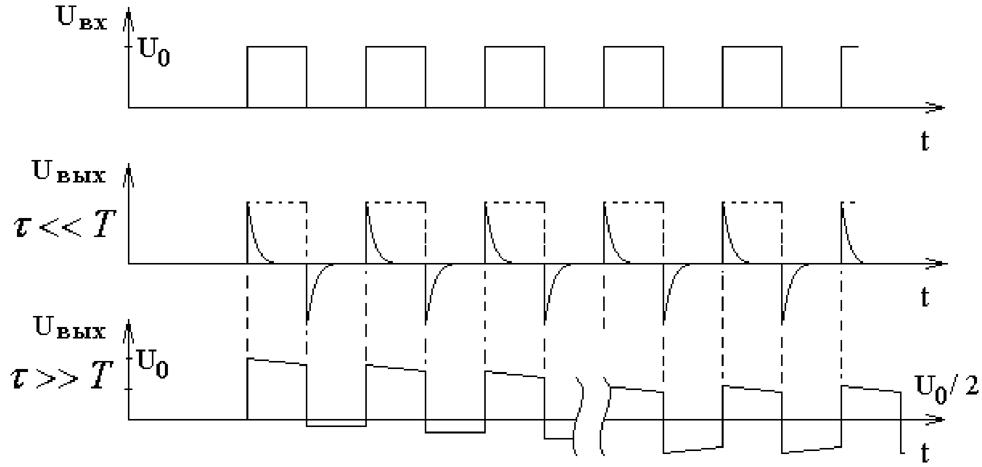
Реакция RL-цепочки на ступеньку напряжения.



$$U_{вых} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Если на вход схемы подать последовательность прямоугольных импульсов, то



Здесь T — период прямоугольников, $\tau = \dfrac{L}{R}$ — постоянная времени RL-цепочки.