

Экзамен. Электростатическое поле E произвольного распределения неподвижных зарядов (продолжение).

Иногда удобно рассматривать непрерывное распределение заряда, а не точечные заряды, например, в плазме газового разряда или для электронного облака в атоме водорода.

Для описания непрерывных распределений зарядов введем понятие плотности зарядов:

$\rho \equiv \frac{dq}{dV}$ — объемная плотность заряда по аналогии с объемной

плотностью массы $\rho \equiv \frac{dm}{dV}$,

$\sigma \equiv \frac{dq}{dS}$ — поверхностная плотность заряда,

$\tau \equiv \frac{dq}{dl}$ — линейная плотность заряда.

Из этих определений следует:

$dq = \rho dV = \sigma dS = \tau dl$, тогда

$$\sum_i q_i \leftrightarrow \int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' \leftrightarrow \int_{S'} \sigma(\vec{r}') dS' \leftrightarrow \int_{l'} \tau(\vec{r}') dl'.$$

Следовательно

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i + \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' + \int_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma(\vec{r}') dS' + \int_{l'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tau(\vec{r}') dl'$$

— поле произвольного распределения зарядов.

Если рассматривать все заряды, как объемные, то

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV',$$

если же рассматривать все заряды, как точечные, то

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} q_i.$$

В дальнейшем будем рассматривать заряды, то, как объемные, то, как точечные, в зависимости от того, как нам будет удобнее.

Экзамен. Линии электрического поля E .

Линия векторного поля — это линия, касательная в каждой точке к которой совпадает с направлением векторного поля.

В физике к линиям поля есть дополнительное требование.

Плотность линий поля пропорциональна полю в каждой точке пространства.

$$(\text{Число линий поля } \vec{E}) / (dS_{\perp \vec{E}}) \equiv (\text{Плотность линий поля } \vec{E}) \sim E,$$

здесь $dS_{\perp \vec{E}}$ — проекция площадки, которую пронизывают линии поля \vec{E} , на плоскость перпендикулярную полю \vec{E} .

Условие пропорциональности числа линий поля самой напряженности поля не может быть выполнено в точности, так как напряженность может изменяться непрерывно, а число линий может изменяться только дискретно. Поэтому в физике понятие линий поля — нестрогое понятие.

Экзамен. Поток вектора электрического поля \mathbf{E} .

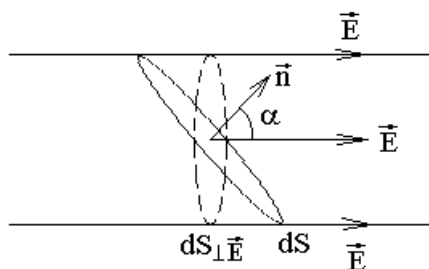
Поток через поверхность — строгий аналог числа линий поля пронизывающих поверхность.

Введем поток Φ_E так, чтобы он был пропорционален числу линий поля, пронизывающих поверхность.

$$d\Phi_E \sim (\text{Число линий поля } \vec{E}) = (\text{Плотность линий поля } \vec{E}) \times dS_{\perp \vec{E}} \sim E dS_{\perp \vec{E}}.$$

$d\Phi_E \equiv E dS_{\perp \vec{E}}$ — определение потока вектора \vec{E} через поверхность, площадь проекции которой на плоскость перпендикулярную вектору \vec{E} равна $dS_{\perp \vec{E}}$.

Выразим площадь проекции поверхности через площадь самой поверхности.



Здесь \vec{n} — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности dS .

Из рисунка видно, что $dS_{\perp \vec{E}} = dS \cos(\alpha)$.

Тогда $d\Phi_E \equiv E dS_{\perp \vec{E}} = E dS \cos(\alpha) = E dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}})$.

Введем определение вектора площадки: $d\vec{S} \equiv \vec{n} dS$. Тогда $\cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) = \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}})$.

Тогда $d\Phi_E = E dS \cos(\widehat{\vec{E}, \vec{n}}) = E dS \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}) = (\vec{E}, d\vec{S})$.

$d\Phi \equiv (\vec{E}, d\vec{S})$ — определение потока поля \vec{E} через произвольно ориентированную площадку $d\vec{S}$.

Экзамен. Электростатическая теорема Гаусса.

Теорема доказывается для неподвижных зарядов. По предположению Максвелла формулировка теоремы остается справедливой и для движущихся зарядов. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, так оно и есть.

Теорема Гаусса утверждает, что

$\Phi_E = 4\pi Q$, где Φ_E — поток через замкнутую поверхность, границу объема V ; Q — сумма зарядов в объеме V .

При вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности — нормаль, направленная наружу из объема V .

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ - теорема Гаусса в системе СИ.}$$

Докажем теорему сначала для поля одного точечного заряда, а затем для поля любой суперпозиции зарядов.

Совместим начало координат с точечным зарядом q , тогда электрическое поле в любой точке $E = \frac{q}{r^2}$.

Рассмотрим малую площадку dS и поток через нее:

$$d\Phi_E = (\vec{E}, d\vec{S}) = E dS_{\perp \vec{E}} = E dS_{\perp \vec{r}} = \frac{q}{r^2} dS_{\perp \vec{r}} = q \frac{dS_{\perp \vec{r}}}{r^2} = q d\Omega,$$

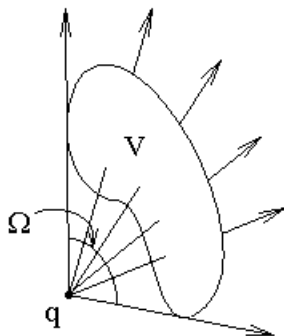
здесь $d\Omega$ — телесный угол, под которым площадка dS видна из точечного заряда q .

Пусть заряд q находится внутри замкнутой поверхности, тогда

$$\left. \begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S d\Phi_E \\ d\Phi_E &= q d\Omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Phi_E = \oint_S q d\Omega = q \oint_S d\Omega = q 4\pi = 4\pi q.$$

Итак, если точечный заряд находится внутри замкнутой поверхности, то формула $\Phi_E = 4\pi Q$ доказана.

Рассмотрим теперь заряд, расположенный снаружи от объема V .



Из рисунка видно, что ближняя и дальняя границы объема относительно заряда видны под одинаковым телесным углом Ω . Тогда потоки через обе

части границы одинаковы по модулю и равны $\Phi_E = q\Omega$, так как $d\Phi_E = q d\Omega$. Модули потоков равны, но знаки потоков противоположны. В таком случае поток через всю замкнутую поверхность будет равен нулю $\Phi_E = 0$, а телесный угол для втекающего потока можно считать отрицательным, для сохранения равенства $d\Phi_E = q d\Omega$.

В данной конфигурации зарядов внутри объема нет $Q = 0$. Поэтому равенство $\Phi_E = 4\pi Q$ выполнено и в этом случае с учетом равенства $\Phi_E = 0$.

Рассмотрим теперь вторую часть доказательства, когда зарядов много.

На равенство $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ подействуем оператором $\oint_S (\cdot, d\vec{S})$ и получим

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \sum_i \oint_S (\vec{E}_i, d\vec{S}_i). \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E_i}, \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \sum_i \Phi_{E_i} = \sum_i 4\pi Q_i = 4\pi \sum_i Q_i = 4\pi Q \quad \Rightarrow$$

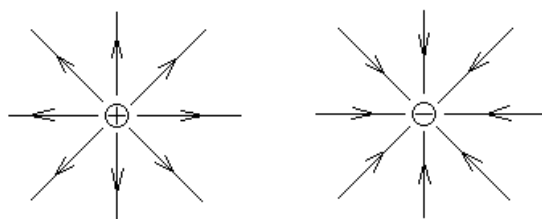
$$\Phi_E = 4\pi Q,$$

что и требовалось доказать.

Факультатив. Линии поле \vec{E} не рвутся.

Если в объеме нет зарядов $Q = 0$, то $\Phi_E = 4\pi Q = 0$. Поток равен нулю — это значит, сколько линий поля втекает в объем, столько и вытекает.

Следовательно, линии поля \vec{E} не начинаются и не заканчиваются в пустом объеме без зарядов. В этом смысле линии поля \vec{E} не рвутся. Это справедливо и для переменных электрических полей.



Линии поля \vec{E} вытекают из положительных зарядов и втекают в отрицательные заряды. В этом смысле заряды буквально являются источниками поля.

Экзамен. Теорема Ирншоу.

Невозможно статическое распределение зарядов, в котором хотя бы один заряд находится в устойчивом равновесии.

Отметим, что неустойчивое равновесие возможно, например:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ 4q & -q & 4q \end{array}$$

Доказательство.

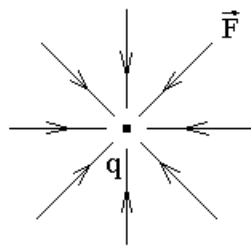
Проведем доказательство методом "от противного".

Предположим, что для одного из зарядов есть устойчивое равновесие и получим противоречие.

Будем считать, что все заряды дискретные — точечные.

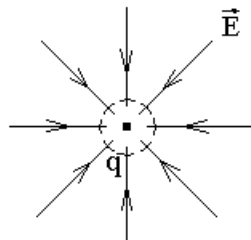
Пусть в устойчивом равновесии находится заряд q , например положительный.

Для устойчивого равновесия поле сил при смещении в любую сторону пытается вернуть заряд в точку равновесия. Тогда поле сил \vec{F} остальных зарядов в окрестности заряда q имеет следующий вид:



Аналогично выглядит и поле \vec{E} остальных зарядов, кроме рассматриваемого заряда q , так как $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$.

Рассмотрим маленькую сферу вокруг заряда q :



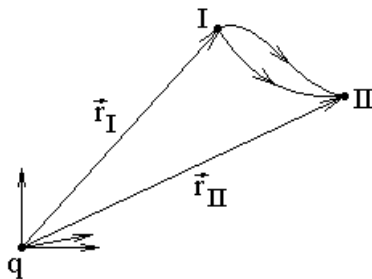
Из рисунка видно, что поток поля \vec{E} остальных зарядов через эту сферу отрицательный $\Phi_E < 0$. Это с одной стороны, а с другой стороны поток равен нулю $\Phi_E = 0$. И действительно, внутри малой сферы вокруг заряда q нет других зарядов, и для них $Q = 0$. Следовательно, для поля \vec{E} остальных зарядов, кроме q , получим $\Phi_E = 4\pi Q = 0$.

Итак $\begin{cases} \Phi_E < 0 \\ \Phi_E = 0 \end{cases}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Экзамен. Потенциальность кулоновских сил.

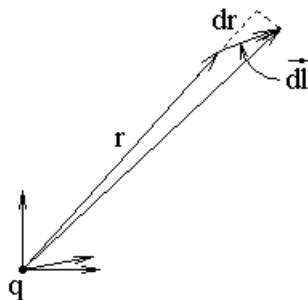
Поле сил потенциально (силы консервативны), если работа по перемещению пробного заряда не зависит от траектории, а зависит только от начальной и конечной точек.

Докажем сначала потенциальность сил со стороны поля одного точечного заряда q . Найдем работу электростатических сил при перемещении пробного заряда q' из точки I в точку II:



Пусть начало координат совпадает с зарядом q . Найдем работу dA на малом участке пути $d\vec{l}$:

$$dA = (\vec{F}', d\vec{l}) = (q' \vec{E}, d\vec{l}) = q' E dl_E = q' E dl_r \approx q' E dr = q' \frac{q}{r^2} dr.$$



Из рисунка видно, что $dl_r \approx dr$.

Работа на конечном участке

$$A_{I \rightarrow II} = \int_I^{II} dA = \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} q' \frac{q}{r^2} dr = q' q \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} \frac{dr}{r^2} = q' q \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_I}^{r_{II}} = q' q \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}} \right) \Rightarrow$$

$$A_{I \rightarrow II} = q' q \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}} \right) \text{ — работа электростатических сил по перемещению}$$

пробного заряда q' в поле заряда q из точки \vec{r}_I в точку \vec{r}_{II} , если начало координат совпадает с зарядом q .

Это выражение не зависит от формы траектории, следовательно, поле \vec{E} точечного заряда потенциально.

Докажем теперь потенциальность сил произвольного распределения точечных зарядов.

Из принципа суперпозиции

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad \left| \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} (q' \cdot, d\vec{l}) \Rightarrow \right.$$

$$\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} (q' \vec{E}, d\vec{l}) = \sum_i \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} (q' \vec{E}_i, d\vec{l}) \Rightarrow$$

$$A_{I \rightarrow II} = \sum_i A_{i, I \rightarrow II} = \sum_i q' q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right)$$

$$A_{I \rightarrow II} = q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right) \quad \text{— работа электростатических сил по}$$

перемещению пробного заряда q' из точки I в точку II. Здесь $\vec{r}_{iI} = \vec{r}_I - \vec{r}_i$ — вектор из i -го заряда в точку I, $\vec{r}_{iII} = \vec{r}_{II} - \vec{r}_i$ — вектор из i -го заряда в точку II.

Экзамен. Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

Энергия — это способность совершить работу, поэтому:

$$W_I \equiv A_{I \rightarrow \infty}.$$

Электростатическая энергия заряда в точке I по определению равна работе электростатических сил по перемещению заряда из точки I на бесконечность.

$$W_I \equiv A_{I \rightarrow \infty} = A_{I \rightarrow II} \Big|_{II \rightarrow \infty} = q' \sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}} \right) \Big|_{r_{iII} \rightarrow \infty} = q' \sum_i q_i \frac{1}{r_{iI}} = q' \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r}_I - \vec{r}_i|}$$

$\Rightarrow W(\vec{r}) = q' \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ — энергия заряда q' в точке с радиус-вектором \vec{r} в поле остальных зарядов q_i .

Экзамен. Потенциал электростатического поля.

Потенциал — потенциальная энергия единичного заряда.

$$\varphi \equiv \frac{W}{q'}$$

Экзамен. Потенциал произвольного распределения зарядов.

Для системы точечных зарядов q_i получим следующее выражение для потенциала φ в точке с радиус-вектором \vec{r} :

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W(\vec{r})}{q'} = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Тогда для произвольного распределения зарядов получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{l'} \frac{\tau(\vec{r}') \cdot dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\varphi = \frac{q}{r}$ — потенциал поля точечного заряда.

В системе СИ $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$.

Экзамен. Связь потенциала и напряженности электростатического поля.

$$\varphi(\vec{r}_I) \equiv \frac{W(\vec{r}_I)}{q'} \equiv \frac{A_{I \rightarrow \infty}}{q'} = \frac{\int_I^{\infty} (\vec{F}', d\vec{l})}{q'} = \int_I^{\infty} \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l} \right) = \int_I^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) \Rightarrow$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \quad \text{— связь потенциала и напряженности в одну}$$

сторону.

Получим теперь связь между \vec{E} и φ в другую сторону.

Рассмотрим

$$\varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) = \int_{\vec{r}_{II}}^{\infty} E_l dl - \int_{\vec{r}_I}^{\infty} E_l dl = - \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl.$$

Устремим $\vec{r}_{II} \rightarrow \vec{r}_I$ и получим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) &\approx d\varphi \\ - \int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl &\approx -E_l dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\varphi = -E_l dl \Rightarrow$$

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} \quad \text{— для любого направления } l.$$

Рассмотрим направления вдоль осей x, y, z :

$$\left\{ \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \text{ где}$$

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{— оператор набла.}$$

$$\text{grad}(\varphi) \equiv \vec{\nabla} \varphi \quad \text{— определения градиента.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \\ \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{array} \right. \text{ — связь напряженности и потенциала в обе стороны.}$$