Факультатив. Связь силы и потенциальной энергии для любых потенциальных полей.

$\varphi \equiv \dfrac{W}{q'}$ и $\vec{E} \equiv \dfrac{\vec{F}'}{q'}$ и из $\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} E_l\, dl$ мы получили $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Тогда, повторив выкладки, из равенства $W(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$ мы получим $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$. То есть, если $W(\vec{r})$ — это энергия или способность совершить работу из точки $\vec{r}$, то сила может быть выражена через энергию по формуле $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$.

Можно доказать и в обратную сторону, что из равенства $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ следует $W(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$. И действительно:

$$-\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = -\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\vec{\nabla} W, d\vec{l}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{\nabla} W\right)_l dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial l} \cdot dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} dW = W\Big|_{\vec{r}}^{\infty} = -W(\vec{r})$$

То есть, если для силы $\vec{F}$ удалось подобрать такую функцию W, что $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$, то сила — потенциальна, а W - потенциальная энергия, соответствующая этой силе.

Факультатив. Физический смысл градиента.

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции φ равен $\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{i}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$. Проекция градиента на направление оси x — это коэффициент при единичном векторе $\vec{i}$ вдоль оси x, то есть $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ось x можно направить произвольно вдоль любого направления l, следовательно, проекция градиента $\vec{\nabla}\varphi$ на произвольное направление l равна $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$.

Зададимся вопросом, в каком направлении проекция вектора максимальна? Ответ — в направлении самого вектора. Тогда вектор смотрит в направлении, проекция вектора на которое максимальна.

Следовательно, направление градиента, как вектора — это направление, в котором максимальна производная по направлению, то есть направление, в котором функция быстрее всего возрастает.

Градиент имеет направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина градиента равна производной от функции по этому направлению.

Факультатив. Дивергенция.

$$div\left(\vec{A}\right) \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Факультатив. Теорема Гаусса-Остроградского.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int\limits_V div\left(\vec{A}\right) \cdot dV = \oint\limits_S \left(\vec{A}, d\vec{S}\right)$$

Здесь $\oint\limits_S \left(\vec{A}, d\vec{S}\right) \equiv \Phi_A$ — поток произвольного векторного поля $\vec{A}$, и при вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int\limits_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

$$\int\limits_V \left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) \cdot dV = \oint\limits_S \left(\vec{A}, d\vec{S}\right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

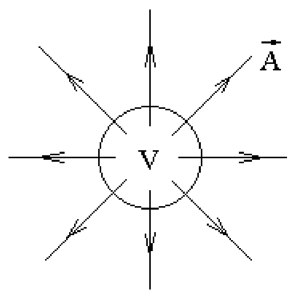
Факультатив. Физический смысл дивергенции.

Рассмотрим малый объем V:

$$\int\limits_V div\left(\vec{A}\right) \cdot dV \approx div\left(\vec{A}\right) \cdot \int\limits_V dV = V \cdot div\left(\vec{A}\right) \quad =>$$

$$div\left(\vec{A}\right) \approx \frac{\int\limits_V div\left(\vec{A}\right) \cdot dV}{V} = \frac{\oint\limits_S \left(\vec{A}, d\vec{S}\right)}{V} = \frac{\Phi_A}{V} \quad =>$$

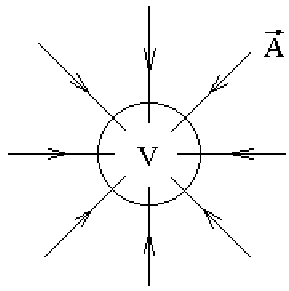
Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



,

то поток положительный $\Phi_A > 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) > 0$.

Если же



то поток отрицательный $\Phi_A < 0$ => $div\left(\vec{A}\right) < 0$.

Дивергенция — производная во все стороны.

Экзамен. Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме.

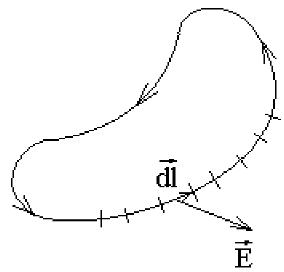
$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \left|\cdot\frac{1}{V}\right. \quad => \quad \frac{\Phi_E}{V} = \frac{4\pi Q}{V} \quad \left| V \to 0 \right. \quad =>$$

$$div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho$$

В системе СИ: $div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Экзамен. Теорема о циркуляции электростатического поля Е.

$\Gamma_E \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint\limits_l E_l dl$ — определение циркуляции поля $\vec{E}$.



Для вычисления циркуляции по контуру или по замкнутой линии эту замкнутую линию нужно разбить на большое число малых отрезков. Каждому отрезку соответствует вектор $d\vec{l}$. В области отрезка электрическое поле $\vec{E}$ почти постоянно. Для каждого отрезка нужно вычислить $\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ и просуммировать соответствующие величины по замкнутому контуру.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру:

$$\Gamma_E \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint\limits_l \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint\limits_l \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint\limits_l dA = \frac{1}{q'} A_{I\to I}$$

Работу по перемещению заряда по замкнутому контуру $A_{I\to I}$ можно найти из выражения для работы по перемещению из точки I в точку II:

$$A_{I\to I} = A_{I\to II}\Big|_{II\to I} = q'\sum_i q_i \left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}}\right)\Bigg|_{II\to I} = 0 =>$$

$\Gamma_E = 0$ или, что то же самое, $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0$ — теорема о циркуляции электростатического поля.

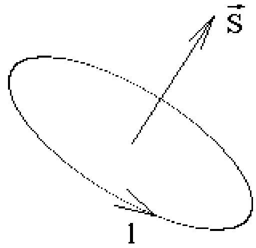
Факультатив. Ротор.

$$rot\left(\vec{A}\right) \equiv \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j} \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Факультатив. Теорема Стокса.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right),$$



Направление нормали к поверхности и направление обхода контура образуют правый винт.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int\limits_a^b f'dx = f(b) - f(a)$$

$$\int\limits_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right], d\vec{S}\right) = \oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

Факультатив. Физический смысл ротора.

Рассмотрим маленькую площадку S:

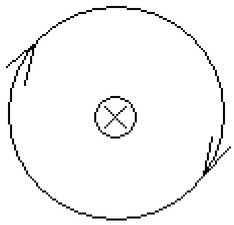
$$\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n dS \approx \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \cdot \int\limits_S dS \approx S \cdot \left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \quad \Rightarrow$$

$$\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)_n \approx \frac{\int\limits_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right)}{S} = \frac{\oint\limits_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right)}{S} = \frac{\Gamma_A}{S}$$

Ротор — поверхностная плотность циркуляции.

Циркуляция — мера закрученности поля.

Ротор производная вида:



Экзамен. Теорема о циркуляции электростатического поля E в дифференциальной форме.

По теореме о циркуляции электростатического поля для любого контура l:

$$\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0 \qquad \left|\cdot\frac{1}{S}\right. \qquad \left| S \to 0 \right. \qquad =>$$

$\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)_n = 0$ — для любого направления вектора нормали $\vec{n}$. Тогда

$rot\left(\vec{E}\right) = 0$

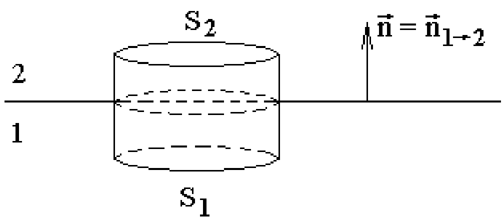
Экзамен. Скачок электрического поля E при переходе через заряженную поверхность.

Этот же вопрос можно было бы назвать "граничные условия для поля $\vec{E}$ в вакууме", так как заряженную поверхность можно рассматривать, как границу двух объемов.

Любая поверхность вблизи выглядит плоской.

Рассмотрим скачок поля $\vec{E}$ на плоской поверхности с поверхностной плотностью заряда σ.

Рассмотрим цилиндр малой высоты с основаниями параллельными заряженной плоскости. Пусть основания цилиндра расположены с двух сторон от заряженной плоскости.



Если высота цилиндра мала, то потоком через боковую поверхность можно пренебречь. Тогда

$$\Phi \approx \Phi_{S_2} + \Phi_{S_1} = E_{2n}S - E_{1n}S ,$$

где минус в последнем выражении вызван тем, что внешняя нормаль к цилиндру на площадке S_1 противоположна выбранному направлению нормали к заряженной плоскости $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

С другой стороны, тот же поток по теореме Гаусса равен

$\Phi = 4\pi Q = 4\pi\sigma S$.

Сравнивая два выражения для потока Φ, получим

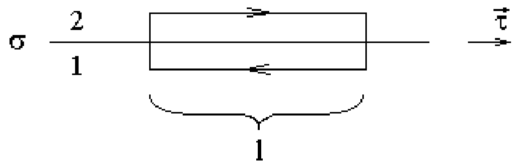
$E_{2n}S - E_{1n}S = 4\pi\sigma S$ =>

$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$,

где нормаль к границе $\vec{n}$ смотрит из объема 1 в объем 2.

Рассмотрим теперь тангенциальную (по касательной к поверхности) составляющую поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную границу.

Рассмотрим прямоугольный контур в плоскости перпендикулярной заряженной поверхности.



Если высота прямоугольника мала, то вклад в циркуляцию вертикальных отрезков пренебрежимо мал. Тогда

$\Gamma_E \approx \Gamma_2 + \Gamma_1 = E_{2l} \cdot l + E_{1l} \cdot l = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l$,

где минус вызван тем, что на нижнем отрезке направление $d\vec{l}$ противоположно выбранному направлению единичного тангенциального вектора $\vec{\tau}$.

По теореме о циркуляции электростатического поля $\vec{E}$ имеем $\Gamma_E = 0$. Сравнивая равенство $\Gamma_E = 0$ с другим только что полученным равенством $\Gamma_E = E_{2\tau}l - E_{1\tau}l$, находим:

$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$.

Здесь $\vec{\tau}$ — единичный вектор по касательной к заряженной поверхности.