Экзамен. Три формы электростатической теоремы Гаусса и теоремы о циркуляции.

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases}$$

— электростатическая теорема Гаусса в интегральной, дифференциальной формах и для границы раздела.

$$\begin{cases} \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

— теорема о циркуляции электростатического поля E в интегральной, дифференциальной формах и для границы раздела.

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 1. Сферическая симметрия.

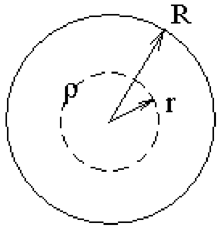
Рассмотрим задачу. Дан шар с радиусом R и объемной плотностью заряда ρ. Найти в любой точке пространства $\vec{E}$ и φ.

Решение.

Сначала найдем поле $\vec{E}$, а затем φ.

Будем искать поле $\vec{E}$ внутри шара на расстоянии r от центра шара $r \le R$.

Рассмотрим сферу с радиусом r с центром, совпадающим с центром заряженного шара.



Для сферы радиусом r применим теорему Гаусса:

$\Phi_E = 4\pi Q$ =>

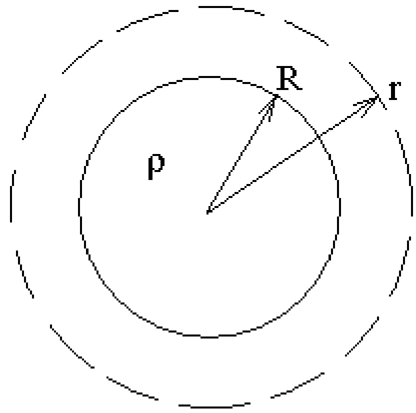
$E(r) \cdot S(r) = 4\pi \cdot \rho V(r)$ =>

$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ =>

$E = \frac{4}{3}\pi\rho \cdot r$ при $r \le R$

Найдем теперь E при $r \ge R$.

Рассмотрим сферу $r \geq R$:



Для сферы $r \geq R$:

$\Phi_E = 4\pi Q$ =>

$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$ =>

$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

Здесь объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, так как только в этой части объема $\frac{4}{3}\pi r^3$ есть заряды. Тогда

$E = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}$ при $r \geq R$.

$E = \frac{Q}{r^2}$ при $r \geq R$, где Q — полный заряд шара.

Найдем теперь потенциал φ.

Сначала найдем потенциал снаружи от заряженного шара при $r \geq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r} \qquad \text{при } r \geq R.$$

Теперь найдем потенциал φ внутри шара при $r \leq R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_r^{R} E dr + \int_R^{\infty} E dr = \int_r^{R} \frac{4}{3}\pi\rho \cdot r dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\rho \cdot r^2 \Big|_r^R + \frac{4}{3}\pi\rho R^2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \quad =>$$

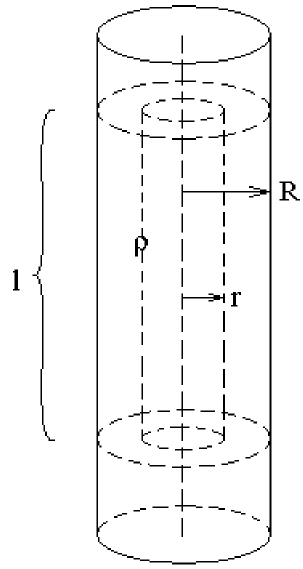
$$\varphi = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2 \text{ при } r \leq R.$$

<u>Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 2. Цилиндрическая симметрия.</u>

Задача. Дан бесконечно длинный цилиндр радиуса R с плотностью заряда ρ. Найти поле $\vec{E}$.

Решение.

Чтобы найти поле E внутри заряженного цилиндра рассмотрим применение теоремы Гаусса к соосному цилиндру с радиусом $r \le R$ и длиной l.



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

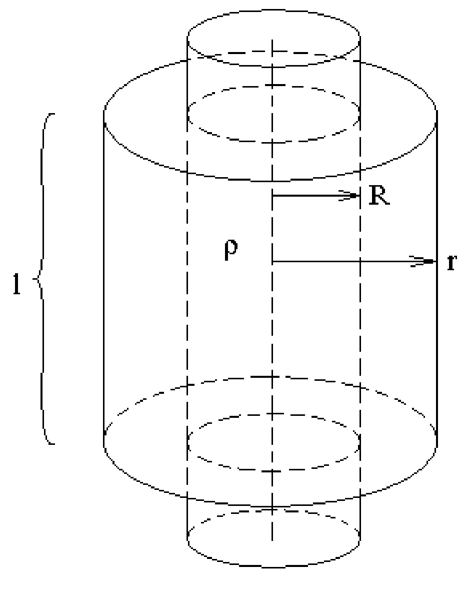
$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi\rho \cdot \pi r^2 l$$

$$E = 2\pi\rho \cdot r \qquad \text{при } r \le R.$$

Найдем теперь поле $\vec{E}$ снаружи заряженного цилиндра при $r \ge R$.

Рассмотрим цилиндр с радиусом $r \ge R$ и высотой l.



$$\Phi_E = 4\pi Q$$

$$E \cdot S = 4\pi \cdot \rho V$$

$E \cdot 2\pi rl = 4\pi\rho \cdot \pi R^2 l$

Здесь объем $V = \pi R^2 l$, так как только в этой части объема $\pi r^2 l$ есть заряды. Тогда

$$E = 2\pi\rho \frac{R^2}{r} \qquad \text{при } r \ge R.$$

<u>Факультативная вставка.</u>

Попробуем найти потенциал φ.

Пусть точка наблюдения находится снаружи заряженного цилиндра $r \ge R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_r^\infty E_l \cdot dl = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty 2\pi\rho \frac{R^2}{r} \cdot dr = 2\pi\rho R^2 \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r} = 2\pi\rho R^2 \cdot \ln(r)\Big|_r^\infty = \infty$$

Интеграл расходится, так как $\ln(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$.

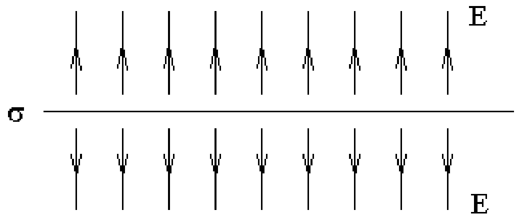
В реальном опыте потенциал не будет бесконечным, так как не бывает бесконечно длинных заряженных цилиндров.

Если h — длина заряженного цилиндра, то при $r >> h$ цилиндр выглядит, как точечный заряд. Тогда

$$E \approx \frac{Q}{r^2} \qquad => \qquad \varphi \approx \frac{Q}{r}, \qquad \text{где } Q = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 h.$$

Экзамен. Поля симметричных распределений зарядов. 3. Плоская симметрия.

Бесконечная заряженная плоскость создает напряженность поля $E = 2\pi\sigma$ с каждой стороны от плоскости:



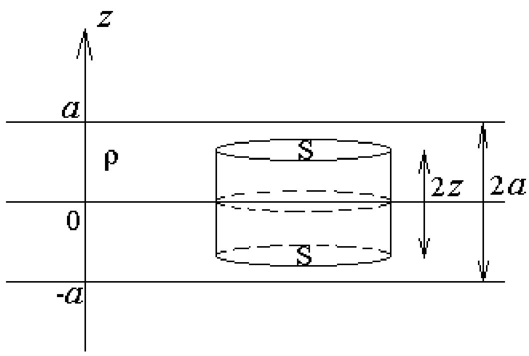
Это можно доказать, опираясь только на симметрию задачи и на скачок поля $\vec{E}$ при переходе через заряженную поверхность: $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$.

Задача. Дан бесконечный слой толщиной $2a$ с плотностью заряда ρ. Найти поле $\vec{E}$.

Решение.

Сначала поищем напряженность внутри заряженного слоя при $|z| \le a$.

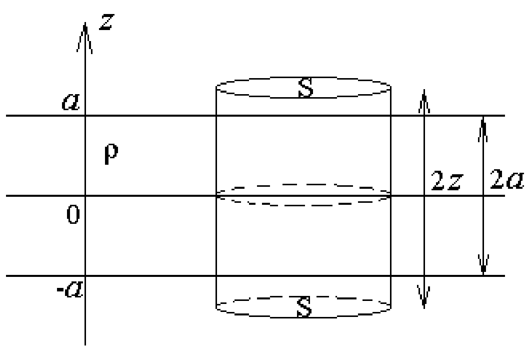
Применим теорему Гаусса к цилиндру с площадью основания S и высотой $2z$. Пусть цилиндр симметрично расположен относительно заряженного слоя.



$\Phi_E = 4\pi Q$ => $2ES = 4\pi\rho V$ => $2ES = 4\pi\rho \cdot 2zS$ =>

$E_z = 4\pi\rho z$ при $|z| \le a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Теперь поищем напряженность снаружи заряженного слоя при $|z| \ge a$.



$\Phi_E = 4\pi Q$ => $2ES = 4\pi\rho V$ => $2ES = 4\pi\rho \cdot 2aS$ =>

$E = 4\pi\rho a$ при $|z| \ge a$, где ось z направлена перпендикулярно заряженному слою.

Экзамен. Дифференциальное уравнение для потенциала.

$$4\pi\rho = div\left(\vec{E}\right) = div\left(-\vec{\nabla}\varphi\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right) = -\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\varphi = -\Delta\varphi$$

$\Delta \equiv \left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right) = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа или лапласиан.

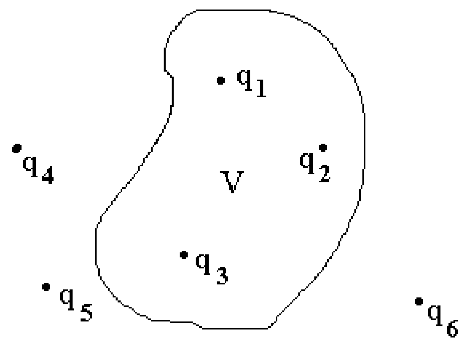
Тогда $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ — уравнение Пуассона — это и есть дифференциальное уравнение для потенциала φ.

Если $\rho = 0$, то

$\Delta\varphi = 0$ — уравнение Лапласа — уравнение для потенциала в области без зарядов.

Факультатив. Краевая задача электростатики.

Рассмотрим систему зарядов и некоторый объем V. Пусть одна часть зарядов находится внутри объема V, а другая — снаружи.



Если известно расположение всех зарядов, то потенциал в любой точке найти легко:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Пусть расположение зарядов известно только внутри объема V, но не известно за его пределами.

Какое условие для потенциала на границе объема нужно знать, чтобы можно было единственным образом найти потенциал внутри объема?

В этом и состоит краевая задача электростатики.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 1. Задача Дирихле.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если в каждой точке границы S объема V задан потенциал $\varphi(\vec{r})\big|_{\vec{r}\in S} \equiv \varphi\big|_S$.

Подразумевается, что в каждой точке внутри объема V задана плотность зарядов $\rho(\vec{r})$.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 2. Задача Неймана.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если в каждой точке границы S задана производная $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ от потенциала по нормали к границе и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Экзамен. Краевая задача электростатики. 3. Краевая задача с границами в виде проводников.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если каждая граница объема — проводник, на каждой границе задан полный заряд Q_i и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Факультатив. К вопросу о существовании решения краевой задачи электростатики.

Дифференциальное уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ с заданным потенциалом на границе $\varphi\big|_S$ можно преобразовать к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этих интегральных уравнений существование решения доказано, поэтому решение краевой задачи Дирихле всегда существует.

Решения краевой задачи Неймана и задачи с проводниками существуют не всегда.

Подробнее:
http://igor-krylov.ru/Lectures/ElectroMag/Puasson_and_Fredgolm.pdf

или
http://igor-krylov.narod.ru/Lectures/ElectroMag/Puasson_and_Fredgolm.pdf

или
http://www.phys.spbu.ru/content/File/Library/studentlectures/Krylov/Puasson_i_Fredgolm.pdf

Экзамен. Краевая задача электростатики. 4. Краевая задача общего вида.

Уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет единственное решение в объеме V, если на каждой границе объема V задано одно из условий вида 1, 2 или 3 и хотя бы в одной точке границы задан потенциал.

Если потенциал не задан ни в одной точке границы, то решение единственное с точностью до произвольного слагаемого в виде константы.

Факультатив. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики.

Предположим, что есть два решения φ_1 и φ_2, и для каждого из них выполнены граничные условия. Рассмотрим напряженности $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$ соответствующие двум потенциалам.

Докажем, что два решения φ_1 и φ_2 тождественны. Для этого потребуется доказать, что в каждой точке объема $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$, тогда из этого равенства будет следовать $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, так как $\vec{E}_i = -\vec{\nabla}\varphi_i$. Кроме того, в каждой из четырех краевых задач хотя бы в одной точке границы выполнено условие $\varphi_1\big|_S = \varphi_2\big|_S$. Откуда следует, что в одной точке границы $(\varphi_1 - \varphi_2)\big|_S = 0$. И так, производная во всех точках объема равна нулю $\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, а сама функция равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)\big|_S = 0$ хотя бы в одной точке. Тогда функция во всех точках объема равна нулю $(\varphi_1 - \varphi_2)\big|_V = 0$ или $\varphi_1\big|_V = \varphi_2\big|_V$, следовательно, два решения φ_1 и φ_2 тождественны.

Вернемся к доказательству равенства $\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = 0$ для всех точек объема. С этой целью докажем два равенства:

$$\begin{cases} \int\limits_V \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) dV = \oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) \vec{\nabla}\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), d\vec{S}\right) = 0 \end{cases}.$$