Факультатив. Доказательство единственности решения краевой задачи электростатики (продолжение)**.**

Если мы их докажем, то получим $\int\limits_V \left(\vec{E}_1-\vec{E}_2, \vec{E}_1-\vec{E}_2\right) dV = 0$ или $\int\limits_V \left|\vec{E}_1-\vec{E}_2\right|^2 dV = 0$, то есть $\vec{E}_1-\vec{E}_2=0$ в каждой точке объема.

Докажем сначала первое равенство системы.

$\oint\limits_S \left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2), d\vec{S}\right) = \int\limits_V div\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV$ - по теореме Гаусса-Остроградского для векторного поля $(\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)$. Тогда

$$\oint\limits_S \left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2), d\vec{S}\right) = \int\limits_V div\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV = \int\limits_V \left(\vec{\nabla}, (\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV =$$

Левую набла в последнем выражении — это производная от произведения $(\varphi_1-\varphi_2)$ на $\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)$. Тогда цепочку равенств можно продолжить, как производную от первого сомножителя на нетронутый второй, плюс производная от второго сомножителя на нетронутый первый:

$$=\int\limits_V \left(\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2), \vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot dV =$$

$$=\int\limits_V \left(\vec{\nabla}\varphi_1-\vec{\nabla}\varphi_2, \vec{\nabla}\varphi_1-\vec{\nabla}\varphi_2\right)\cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)(\varphi_1-\varphi_2)\cdot dV =$$

$$\int\limits_V \left(\vec{E}_1-\vec{E}_2, \vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1-\varphi_2)\cdot\Delta(\varphi_1-\varphi_2)\cdot dV =$$

$$=\int\limits_V \left(\vec{E}_1-\vec{E}_2, \vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1-\varphi_2)\cdot(\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2)\cdot dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\vec{E}_1-\vec{E}_2, \vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV + \int\limits_V (\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(-4\pi\rho-(-4\pi\rho)\right)\cdot dV =$$

$$= \int\limits_V \left(\vec{E}_1-\vec{E}_2, \vec{E}_1-\vec{E}_2\right)\cdot dV .$$

Таким образом, первое равенство системы доказано.

Докажем теперь второе равенство системы:

$$\oint\limits_S \left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2), d\vec{S}\right) = 0 .$$

Сначала преобразуем левую часть равенства к более удобному виду. Рассмотрим подынтегральное выражение:

$$\left((\varphi_1-\varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2), d\vec{S}\right) = (\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2), d\vec{S}\right) =$$

$$(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)_{d\vec{S}}\cdot dS = (\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\vec{\nabla}(\varphi_1-\varphi_2)\right)_{\vec{n}}\cdot dS =$$

$$(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\frac{\partial(\varphi_1-\varphi_2)}{\partial n}\cdot dS=(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS$$

И так, нужно доказать равенство

$$\oint_S(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0,$$

докажем его отдельно для краевой задачи каждого вида.

1. Рассмотрим доказательство равенства $\oint_S(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0$ для задачи Дирихле, в которой $\varphi_1\big|_S=\varphi_2\big|_S$ в любой точке границы S.

$\varphi_1\big|_S=\varphi_2\big|_S$ => $(\varphi_1-\varphi_2)\big|_S=0$ => Первый сомножитель $(\varphi_1-\varphi_2)$ под интегралом в любой точке границы, по которой и идет интегрирование, равен нулю. Следовательно, весь интеграл равен нулю, и равенство доказано для задачи Дирихле.

2. Рассмотрим теперь доказательство равенства $\oint_S(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0$ для задачи Неймана.

В краевой задаче Неймана $\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S$, следовательно, на поверхности S второй сомножитель подынтегрального выражения тождественно равен нулю, и интеграл равен нулю.

3. Теперь рассмотрим доказательство равенства $\oint_S(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=0$ для задачи с границами в виде проводников.

Вся поверхность проводника в электростатике имеет одинаковый потенциал — является эквипотенциальной поверхностью. Это утверждение будет доказано чуть позднее, когда мы будем рассматривать свойства проводников. В символьном виде это может быть записано, как $\varphi\big|_{S_i}=const_i$, где S_i — поверхность i-го проводника границы, если граница многосвязная.

Тогда $(\varphi_1-\varphi_2)\big|_{S_i}=const_i$

Этот сомножитель, как постоянную величину, можно вынести из под интеграла по границе i-го проводника:

$$\oint_{S_i}(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS=(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\oint_{S_i}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)dS=$$

$$=(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\oint_{S_i}(-E_{1n}+E_{2n})\cdot dS$$

Чуть позднее, рассматривая свойства проводников, мы получим, что над поверхностью проводника $E_n = 4\pi\sigma$, где σ — поверхностная плотность зарядов на проводнике. Тогда $-E_{1n} + E_{2n} = -4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2$ =>

$$(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\oint\limits_{S_i}(-E_{1n} + E_{2n})\cdot dS = (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\oint\limits_{S_i}(-4\pi\sigma_1 + 4\pi\sigma_2)\cdot dS =$$

$$= 4\pi\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\oint\limits_{S_i}\sigma_2 dS - \oint\limits_{S_i}\sigma_1 dS\right) = 4\pi\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot(Q_{2i} - Q_{1i}).$$

Здесь Q_{1i} и Q_{2i} — полный заряд на i-ом проводнике в первом и втором решениях. Поскольку в краевой задаче с проводниками заряд на каждом проводнике задан, получаем $Q_{2i} = Q_{1i}$. Следовательно, интеграл равен нулю и для этой краевой задачи.

Для краевой задачи общего вида равенство $\oint\limits_S(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\cdot dS = 0$ будет выполнено для каждой границы, так как в краевой задаче общего вида на каждой границе выполнено одно из трех предыдущих краевых условий.

В результате равенство $\oint\limits_S\left((\varphi_1 - \varphi_2)\vec{\nabla}(\varphi_1 - \varphi_2), d\vec{S}\right) = 0$ доказано для краевой задачи любого из четырех видов, и единственность решения краевой задачи электростатики доказана для этих четырех видов задач.

Экзамен. Основные свойства проводников в электростатическом поле.

Проводник — материал, в котором под действием электрического поля $\vec{E}$ течет электрический ток.

Свойства проводников.

1. $\vec{E}_{внутри} = 0$ — поле $\vec{E}$ внутри проводника отсутствует.

Докажем это утверждение методом "от противного". Предположим, что $\vec{E}_{внутри} \neq 0$ и получим противоречие.

И действительно. Если электростатическое поле внутри неподвижного проводника не равно нулю $\vec{E}_{внутри} \neq 0$, то по определению проводника в нем течет ток, тогда заряды движутся, и не выполняются условия электростатики. Полученное противоречие доказывает, что поле $\vec{E}_{внутри}$ внутри проводника равно нулю.

Если же отойти от рассмотрения электростатики, тогда, если в проводнике течет ток, то в проводнике есть отличное от нуля электрическое поле. Приложенное к проводнику напряжение создает в нем электрический ток.

2. $0 = \vec{E}_{внутри} = -\vec{\nabla}\varphi_{внутри} = 0$ => $\varphi_{внутри} = const$ - каждый проводник в электростатике эквипотенциален.

3. $$\begin{cases} 4\pi\rho_{внутри} = div\left(\vec{E}_{внутри}\right) \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho_{внутри} = 0 \Rightarrow$$

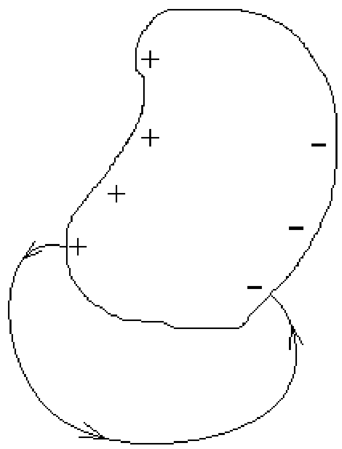
В электростатике нескомпенсированные заряды проводника могут находиться только на его поверхности.

4. $$\begin{cases} E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_n = 4\pi\sigma$$ - нормальная составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника с поверхностной плотностью заряда σ, где $\vec{n}$ — нормаль, направленная из проводника наружу.

5. $$\begin{cases} E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \\ \vec{E}_{внутри} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_\tau = 0$$ - тангенциальная составляющая поля $\vec{E}$ над поверхностью проводника отсутствует.

6. (Факультативно) В электростатике невозможно, чтобы линия поля $\vec{E}$ начиналась и заканчивалась на одном и том же проводнике, так как вдоль линии поля $\vec{E}$ потенциал понижается, а поверхность проводника эквипотенциальна.

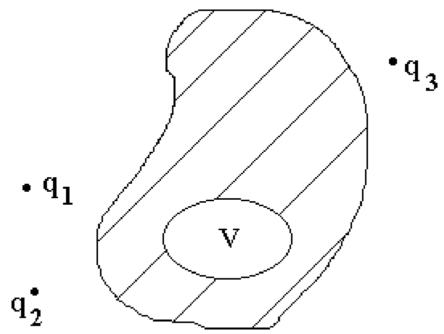
Невозможно:



<u>Экзамен. Экранирование электростатического поля проводником.</u>

Переменное электромагнитное поле тоже экранируется, но не полностью.

Если в проводнике есть полость без зарядов, то внутри полости $\vec{E} = 0$ независимо от того заряжен ли проводник и есть ли заряды снаружи проводника.



Рассмотрим объем полости V внутри тела проводника. Граница S объема V эквипотенциальна, так как является поверхностью проводника. Пусть потенциал этой поверхности равен φ_0. Тогда $\varphi\big|_S = \varphi_0$.

Придумаем в объеме V решение для уравнения $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Придумаем решение в виде постоянного потенциала $\varphi(\vec{r})\big|_V = \varphi_0$.

Это решение удовлетворяет условию краевой задачи Дирихле $\varphi\big|_S = \varphi_0$. Это решение удовлетворяет и уравнению Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ в объеме V, так как в этом объеме нет зарядов: $\rho = 0$, и так как производные от постоянного потенциала φ_0 равны нулю: $\Delta\varphi = 0$.

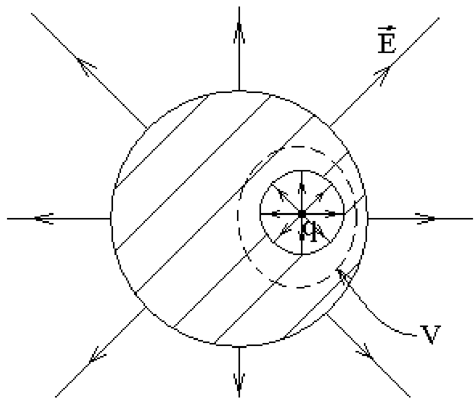
Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что другого решения для потенциала в полости быть не может. Значит, придуманное нами решение для потенциала в объеме полости V и будет настоящим решением для потенциала в полости.

$\varphi(\vec{r})\big|_V = \varphi_0 = const \qquad => \qquad \vec{E} = 0$

Внутри полости поле $\vec{E}$ отсутствует или, что то же самое, проводник экранирует электростатическое поле.

<u>Факультатив. Заряд внутри полости проводника.</u>

Рассмотрим задачу: пусть есть незаряженный проводящий шар, внутри шара — сферическая полость, в центре полости точечный заряд. Найти поле $\vec{E}$ везде.



Сначала докажем, что на внутренней поверхности проводника, на поверхности полости, соберется заряд $-q$. Для этого применим теорему Гаусса к пунктирной границе S объема V. Все точки поверхности S находятся внутри объема проводника. Следовательно, в точках границы S отсутствует поле $\vec{E}$. Тогда и поток поля $\vec{E}$ через поверхность S равен нулю: $\Phi_E = 0$. С учетом теоремы Гаусса $\Phi_E = 4\pi Q$. Тогда $Q = 0$, сумма зарядов внутри поверхности S равна нулю. Внутри объема проводника зарядов нет. Следовательно, если в полости заряд q, то на границе полости находится заряд $-q$.

Проводник не заряжен. Если на поверхности полости находится заряд $-q$, то на внешней поверхности проводника должен быть суммарный заряд q.

Теперь можно решать две совершенно независимые задачи.

В 1-ой задаче рассмотрим объем полости V. В этой задаче в центре объема V находится точечный заряд q. Во всех точках границы этого объема потенциал одинаков, так как это поверхность проводника. На этой поверхности расположен заряд $-q$. Задача сферически симметрична. Поле в этом объеме можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r меньше радиуса полости. Решение — поле точечного заряда $E = \dfrac{q}{r^2}$.

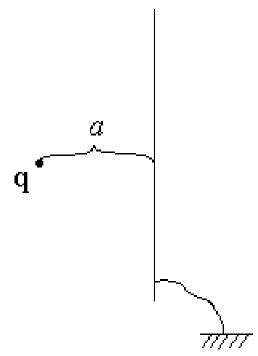
Во второй задаче рассмотрим объем снаружи проводника. На границе этого объема задан заряд q, и граница является поверхностью проводника. Снаружи этой поверхности зарядов нет. Задача сферически симметрична. Ее решение можно найти с помощью теоремы Гаусса, рассмотрев сферу с произвольным радиусом r больше радиуса проводящего шара. Решение — поле точечного заряда $E = \dfrac{q}{r^2}$. Заметим, что центр симметрии 2-ой задачи не совпадает с центром симметрии 1-ой задачи. И еще — если полость в проводящем шаре имеет любую другую форму, то поле $\vec{E}$ снаружи проводящего шара не изменится.

Обобщая рассмотренную задачу, приходим к следующему выводу. Если есть незаряженный проводник, в полости которого есть какие-то заряды, то электростатическое поле снаружи проводника такое же, как будто полости нет, и проводник заряжен зарядами полости.

Экзамен. Метод изображений. 1. Точечный заряд над проводящей заземленной плоскостью.

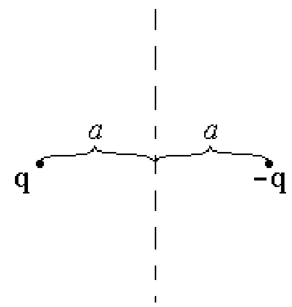
Рассмотрим задачу.

Дан точечный заряд q, расположенный над заземленной проводящей плоскостью на расстоянии a. Найти потенциал и напряженность поля в полупространстве над плоскостью.



Когда в задаче говориться, что проводник заземлен, то подразумевается, что он поддерживается под нулевым потенциалом. На самом деле электрический потенциал Земли отличен от нуля, но чтобы поставить опыт, в котором это отличие проявляется нужно очень постараться. Поэтому и в задачах и на опыте можно считать, что соединение проводника с Землей обнуляет его потенциал.

Сравним эту задачу с другой, в которой нет проводящей плоскости, а вместо нее есть заряд-изображение $-q$, расположенный симметрично заряду q относительно плоскости.



Заряд-изображение $-q$ вместе с зарядом q создают нулевой потенциал в любой точке пунктирной плоскости. Следовательно, придуманный заряд-изображение вместе с реальным зарядом создают нужный потенциал на границе объема V, в котором ищут решение для потенциала. Согласно единственности решения краевой задачи Дирихле в левой половине пространства потенциал в этих двух задачах одинаковый.

В результате поле $\vec{E}$ и поле φ в левой половине пространства — это поля двух точечных зарядов q и $-q$.

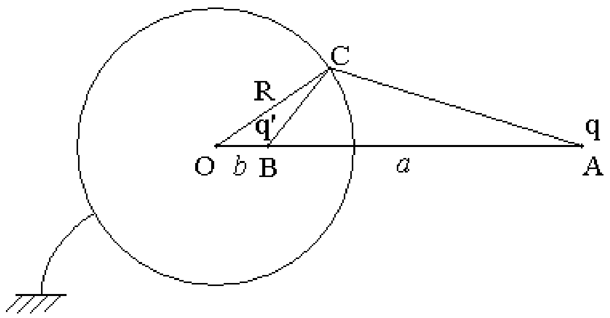
Экзамен. Метод изображений. 2. Точечный заряд и проводящий заземленный шар.

Рассмотрим задачу.

Дан проводящий заземленный шар радиусом R и точечный заряд q на расстоянии $a > R$ от центра шара. Найти потенциал φ в каждой точке пространства.

Покажем, что заряд-изображение q' на расстоянии b от центра шара вместе с реальным зарядом q удовлетворяет граничным условиям для потенциала $\varphi\big|_S = 0$, если

$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{R}{a} \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$



$$b = \frac{R^2}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OA} \quad \Rightarrow$$

$\Delta OCB \sim \Delta OAC$ — треугольники подобны, так как имеют общий угол $\angle BOC$ и прилежащие стороны треугольников пропорциональны $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OC}{OA}$.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{a} \quad \Rightarrow \quad BC = AC\frac{R}{a}$$

Тогда

$$\varphi(C) = \frac{q}{AC} + \frac{q'}{BC} = \frac{q}{AC} + \frac{-q\frac{R}{a}}{AC\frac{R}{a}} = 0.$$

Потенциал в произвольной точке C на сфере равен нулю. Следовательно, заряды q и q' удовлетворяют граничным условиям для потенциала.

Потенциал и напряженность снаружи шара — это потенциал и напряженность пары зарядов q и q', где

$$\begin{cases} q' = -q\dfrac{R}{a} \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$

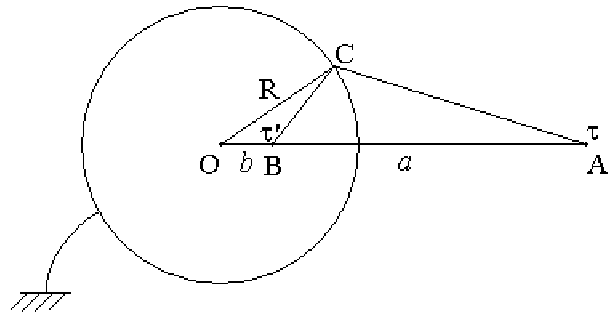
Здесь b — расстояние от центра шара до заряда-изображения q'.

<u>Факультатив. Электрическое поле длинного заземленного проводящего цилиндра и параллельной цилиндру заряженной нити.</u>

Рассмотрим поле заряженной нити и заземленного проводящего цилиндра.

Придумаем заряды-изображения в виде второй заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau' = -\tau$, расположенной параллельно оси цилиндра на расстоянии $b = \dfrac{R^2}{a}$ от оси цилиндра. Здесь R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от оси цилиндра до параллельной цилиндру заряженной нити.

Рассмотрим цилиндр, заряженную нить и заряженную нить-изображение со стороны торца цилиндра.



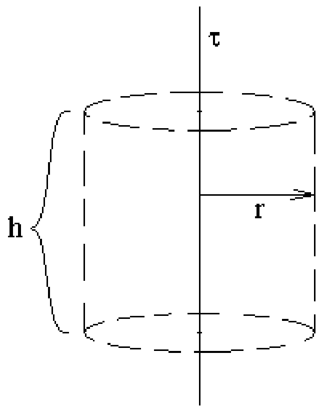
Этот рисунок практически совпадает с рисунком предыдущего вопроса о поле заземленного шара и точечного заряда с точностью до замены $q \to \tau$ и $q' \to \tau'$.

Из подобия треугольников $\Delta OCB \sim \Delta OAC$ следует $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{R}{a}$ =>

$$BC = AC\frac{R}{a}.$$

Найдем теперь поле $\vec{E}$ одной заряженной нити.

Для этого рассмотрим соосный с нитью цилиндр и применим к этому цилиндру теорему Гаусса.



$$\Phi_E = 4\pi Q \qquad \Rightarrow \qquad E \cdot S = 4\pi \cdot \tau h$$

Из симметрии задачи поле $\vec{E}$ направлено по радиусу в плоскости перпендикулярной заряженной нити. Тогда поток отличен от нуля только через боковую поверхность цилиндра. =>

$$E \cdot 2\pi rh = 4\pi\tau h \quad =>$$

$$E = \frac{2\tau}{r}$$

Заметим, что потенциал бесконечной заряженной нити бесконечен. В таких случаях потенциал отсчитывают не от бесконечности, а от некоторой точки, потенциал в которой выбран за ноль. Пусть эта точка расположена на расстоянии r_0 от заряженной нити. При этом из симметрии задачи следует, что потенциал в любой точке на расстоянии r_0 от нити также будет нулевым. Тогда потенциал в произвольной точке на расстоянии r от нити:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(r) = \int_r^{r_0} E_l dl = \int_r^{r_0} E_r dr = \int_r^{r_0} E\, dr = \int_r^{r_0} \frac{2\tau}{r} dr = 2\tau \cdot \ln(r)\Big|_r^{r_0} = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Рассмотрим потенциал двух заряженных нитей τ и τ' в произвольной точке боковой поверхности цилиндра:

$$\varphi(C) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC}\right) + 2\tau' \cdot \ln\left(\frac{r_0}{BC}\right) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC}\right) - 2\tau \cdot \ln\left(\frac{r_0}{AC\frac{R}{a}}\right) = 2\tau \cdot \ln\left(\frac{R}{a}\right)$$

Правая часть равенства не зависит от положения точки C на поверхности цилиндра. Следовательно, для поля двух заряженных нитей τ и τ' боковая поверхность цилиндра эквипотенциальна. Заметим, что для бесконечных заряженных нитей потенциал на поверхности цилиндра — это разность двух бесконечных потенциалов.

Потенциал постоянен, но не нулевой. Для удовлетворения граничным условиям цилиндр должен иметь нулевой потенциал — потенциал заземленного цилиндра.

Если изменить линейную плотность нити заряда-изображения τ' на любую конечную величину, то потенциал на поверхности цилиндра изменится на бесконечную величину. Для изменения потенциала на конечную величину достаточно изменить τ' на бесконечно малую величину. Для нити с бесконечно малой линейной плотностью заряда напряженность поля везде равна нулю, а потенциал везде одинаковый. Будем считать, что это изменение τ' на бесконечно малую величину произведено. Тогда потенциал всех точек изменится на одинаковую константу, и потенциал на поверхности цилиндра можно сделать нулевым.

Следовательно, поле $\vec{E}$ снаружи заземленного цилиндрического проводника совпадает с полем $\vec{E}$ двух заряженных нитей, где параметры нити-изображения:

$$\begin{cases} \tau' = -\tau \\ b = \dfrac{R^2}{a} \end{cases}.$$

Здесь τ' — линейная плотность заряда нити-изображения, b — расстояние от нити-изображения до оси цилиндра, R — радиус проводящего цилиндра, a — расстояние от заряженной нити с линейной плотностью заряда τ до оси цилиндра.