

Экзамен. Электрическая емкость уединенного проводника.

Рассмотрим уединенный проводник.

Сообщим проводнику заряд q . Заряды как-то распределятся по поверхности проводника. Все точки проводника будут иметь один и тот же потенциал φ .

Что будет, если полный заряд проводника удвоить?

Рассмотрим вместо этого удвоение потенциала проводника. Придумаем решение уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ для объема снаружи проводника в случае удвоения потенциала проводника. Придумаем решение в виде удвоения потенциала в каждой точке объема. Это придуманное решение будет удовлетворять граничным условиям на поверхности проводника и на бесконечности. Кроме того, придуманное решение для потенциала будет удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ в объеме снаружи проводника. Из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что решение для потенциала будет именно таким. Этому удвоению потенциала соответствует удвоение напряженности в каждой точке пространства. Удвоение напряженности над поверхностью проводника означает удвоение поверхностной плотности заряда в каждой точке поверхности проводника. Отсюда следует удвоение всего заряда проводника. Следовательно, удвоение потенциала проводника ведет к удвоению заряда проводника. Полный заряд проводника однозначно задает потенциал во всех точках объема. Это следует из единственности решения краевой задачи с границами в виде проводников. Следовательно, потенциал проводника удваивается при удвоении полного заряда проводника.

Аналогично можно показать, что увеличение заряда проводника втрое приводит к увеличению втрое потенциала проводника. То есть потенциал проводника пропорционален его заряду. Тогда отношение заряда к потенциалу зависит только от размеров и формы проводника.

$C \equiv \frac{q}{\varphi}$ — определение емкости уединенного проводника, где φ — потенциал проводника, когда его заряд равен q .

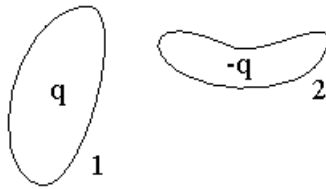
Рассмотрим емкость проводящего шара. $\varphi = \frac{q}{R} \Rightarrow C \equiv \frac{q}{\varphi} = R \Rightarrow$

$C = R$ — емкость проводящего шара равна его радиусу (в системе единиц СГС Гаусса).

$C = 4\pi\epsilon_0 R$ — емкость шара в системе СИ. Емкость земного шара $C \approx 720$ мкФ.

Экзамен. Емкость конденсатора.

Конденсатор — пара проводников. Пусть один из них заряжен зарядом q , а другой — зарядом $-q$. При этом проводники получают потенциалы φ_1 и φ_2 .



$U \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ — определение напряжения между проводниками 1 и 2. Заметим, что напряжение и приращение потенциала отличаются друг от друга знаком.

Аналогично рассуждениям с уединенным проводником можно показать, что при удвоении обоих зарядов потенциал каждого проводника удваивается, а при утроении — утраивается. Следовательно, потенциалы φ_1 , φ_2 и напряжение U пропорциональны величине зарядов q . Отношение величины зарядов к напряжению между проводниками зависит только от размеров, формы и взаимного расположения двух проводников.

$C \equiv \frac{q}{U}$ — определение емкости конденсатора, где U — напряжение между проводниками конденсатора, когда одна его пластина имеет заряд $+q$, а другая — $-q$.

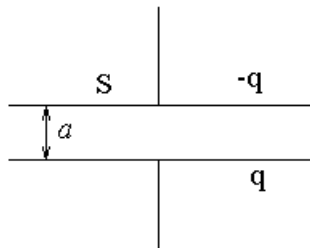
$$U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} E_l dl \text{ — напряжение, выраженное через напряженность.}$$

Экзамен. Емкости простейших конденсаторов. 1. Плоский конденсатор.

Алгоритм вычисления емкости конденсатора:

$$\{+q, -q\} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \rightarrow U \rightarrow C = \frac{q}{U}.$$

Плоский конденсатор — это две плоские проводящие пластины, расстояние a между которыми мало по сравнению с линейными размерами пластин $a \ll \sqrt{S}$. Здесь S — площадь пластин.



Пусть на одной пластине конденсатора находится заряд q , а на другой — заряд $-q$.

Средняя поверхностная плотность заряда каждой пластины $\sigma = \frac{q}{S}$. Заряженная плоскость создает напряженность поля $E = 2\pi\sigma$. Напряженность

поля удваивается в объеме между двумя поверхностями с зарядами разных знаков $E = 4\pi\sigma$.

Напряжение между пластинами 1 и 2 можно найти по формуле

$$U = \int_1^2 E_l dl.$$

Интеграл можно брать по любой кривой соединяющие любые две точки разных пластин. Нам проще вычислять интеграл по линии перпендикулярной плоскости пластин. Вдоль этого направления

$$E_l = E = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{q}{S}.$$

Тогда

$$U = \int_1^2 E_l dl = E_l \cdot \int_1^2 dl = 4\pi \frac{q}{S} a \quad \Rightarrow \quad C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{4\pi \frac{q}{S} a} = \frac{S}{4\pi a} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{S}{4\pi a} \text{ — емкость плоского конденсатора, где } S \text{ — площадь каждой}$$

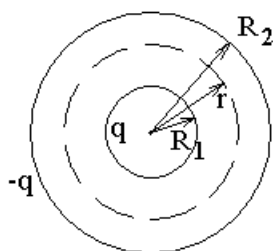
пластины, a — расстояние между пластинами. При стремлении расстояния между пластинами a к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

В системе СИ емкость конденсатора нужно умножить на $4\pi\epsilon_0$, тогда:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{a} \text{ — емкость плоского конденсатора.}$$

Экзамен. Емкости простейших конденсаторов. 2. Сферический конденсатор.

Сферический конденсатор — это две концентрические проводящие сферы с радиусами R_1 и R_2 .



Рассмотрим теорему Гаусса для пунктирной сферы радиусом r :

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad E \cdot S = 4\pi \cdot q \quad \Rightarrow \quad E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot q \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad U = \int_1^2 E_l \cdot dl = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{r^2} dr = q \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow$$

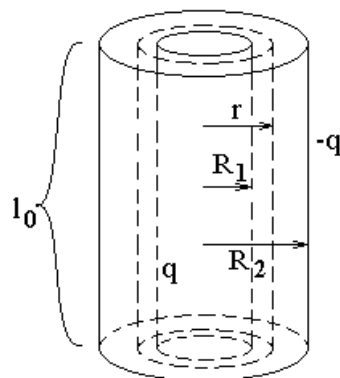
$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{q \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \text{— емкость сферического конденсатора. При стремлении}$$

разности радиусов к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

Экзамен. Емкости простейших конденсаторов. 3. Цилиндрический конденсатор.

Цилиндрический конденсатор — это два соосных проводящих цилиндра. Длина цилиндров гораздо больше радиусов $l_0 \gg R_2 > R_1$.



Применим теорему Гаусса для пунктирного цилиндра соосного обоим проводникам:

$$\Phi_E = 4\pi Q.$$

Если цилиндры бесконечно длинные, то из симметрии задачи вектор \vec{E} направлен в плоскости перпендикулярной оси цилиндров и направлен по радиусу в этой плоскости. Тогда поток есть только через боковую поверхность цилиндра. Для просто длинного цилиндра то же самое будет выполняться только приближенно. Тогда

$$E \cdot S = 4\pi \cdot Q \quad \Rightarrow \quad E \cdot 2\pi r \cdot l_0 = 4\pi \cdot q \quad \Rightarrow \quad E = \frac{2q}{l_0 r} \quad \Rightarrow$$

$$U = \int_1^2 E_l dl = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2q}{l_0 r} dr = \frac{2q}{l_0} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{2q}{l_0} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$C \equiv \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{2q}{l_0} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{l_0}{2 \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{l_0}{2 \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \text{ — емкость цилиндрического конденсатора, где } l_0 \text{ —}$$

длина цилиндров, R_1 и R_2 — радиусы цилиндров. При стремлении разности радиусов к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности.

Факультатив. Потенциальные и емкостные коэффициенты.

Рассмотрим N проводников с зарядами q_i . Пусть при этом потенциалы проводников принимают значения φ_i .

Потенциалы линейно зависят от зарядов. Коэффициенты этой зависимости называются потенциальными коэффициентами.

$$\varphi_n = \sum_k V_{nk} q_k, \text{ где } \varphi_n \text{ — потенциал } n\text{-го проводника, } q_k \text{ — заряд } k\text{-го}$$

проводника, V_{nk} — потенциальные коэффициенты.

Эти соотношения можно рассматривать, как N линейных уравнений относительно N неизвестных зарядов q_i . Решая эти уравнения, получим:

$$q_n = \sum_k C_{nk} \varphi_k. \text{ Здесь } C_{nk} \text{ — емкостные коэффициенты.}$$

Из энергетических соображений можно доказать, что емкостные и потенциальные коэффициенты образуют симметричные матрицы $V_{nk} = V_{kn}$ и $C_{nk} = C_{kn}$.

Недиагональные элементы матрицы C_{nk} отрицательны. Модули этих элементов называют еще межэлектродными емкостями. Например, в электронной лампе пентоде рассматривают межэлектродные емкости между катодом и анодом, между анодом и управляющей сеткой и т. д.

Поясним, почему зависимость между потенциалами и зарядами проводников линейная. Задачу, в которой все проводники поддерживаются под наперед заданными потенциалами, обозначим, как $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$.

Рассмотрим задачу, в которой отличен от нуля потенциал только одного проводника $(0, \dots, 0, \varphi_k, 0, \dots, 0)$. В этой задаче заряды q_n всех проводников пропорциональны величине этого потенциала φ_k аналогично тому, как это было доказано для одного и для двух проводников. То есть $q_n = C_{nk} \varphi_k$, где C_{nk} — коэффициенты пропорциональности.

Придумаем решение для потенциала в задаче $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ в виде суммы решений задач $(0, \dots, 0, \varphi_k, 0, \dots, 0)$ по разным k . Это придуманное решение удовлетворяет потенциалам на всех границах проводников и удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$ в объеме между проводниками. В таком случае из единственности решения краевой задачи Дирихле следует, что решение задачи $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ будет равно именно придуманному решению.

Заряды на проводниках при суммировании решений суммируются, так как суммируются напряженности в любой точке объема, суммируются проекции напряженности на нормаль к поверхности проводника в каждой точке поверхностей проводников, суммируются поверхностные плотности зарядов, суммируются полные заряды на проводниках. В результате

$$q_n = \sum_k C_{nk} \varphi_k.$$

Факультатив. Почему в задачах заряды на пластинах конденсатора всегда равны по величине и противоположны по знаку.

Для обычного конденсатора расстояние между обкладками конденсатора мало, так как при стремлении этого расстояния к нулю емкость конденсатора стремится к бесконечности. Для получения миниатюрного конденсатора с большой емкостью пластины конденсатора стараются разместить как можно ближе друг к другу.

В таком случае емкость конденсатора гораздо больше емкости каждого из двух уединенных проводников, из которых он состоит $C \gg C_0$.

Рассмотрим именно такой обычный $C \gg C_0$ плоский конденсатор с двумя одинаковыми пластинами. Заряды на пластинах линейно зависят от потенциалов пластин:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases} \quad (6.1).$$

Вместо переменных величин φ_1 и φ_2 рассмотрим две других переменных величины: $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_1 + \varphi_2$. Старые переменные линейно зависят от новых:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \varphi_2 = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, заряды на пластинах линейно зависят от новых переменных.

Рассмотрим по очереди две задачи. В одной задаче отлична от нуля будет только разность потенциалов на двух пластинах конденсатора, а сумма потенциалов будет равна нулю. Во второй задаче наоборот, сумма потенциалов отлична от нуля, а разность — равна нулю.

И так в первой задаче пластины конденсатора поддерживаются под равными по величине, но противоположными по знаку потенциалами. Тогда, естественно, и заряды пластин будут иметь противоположные знаки:

$$\begin{cases} q_1 = CU = C(\varphi_1 - \varphi_2) \\ q_2 = -CU = -C(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (6.2).$$

Представим теперь, что на пластины конденсатора поместили одинаковые заряды и одного знака. Тогда из симметрии задачи следует, что разность потенциалов на пластинах будет равна нулю. Если две пластины,

рассмотреть, как одну, но вдвое толще, то емкость этой пластины, как уединенного проводника почти не зависит от его толщины и будет равна емкости одной пластины C_0 . Тогда для этой объединенной пластины:

$q = C_0\varphi$ в соответствии с определением емкости уединенного проводника.

Заряд на каждой пластине конденсатора будет при этом вдвое меньше

$$q_1 = q_2 = \frac{q}{2} = \frac{C_0\varphi}{2},$$

а потенциал каждой пластины будет равен φ :

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} q_1 = C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases} \quad (6.3).$$

Если на пластинах конденсатора одновременно отличны от нуля и разность и сумма потенциалов, то, объединяя равенства (6.2) и (6.3), получим:

$$\begin{cases} q_1 = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = -C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases} \quad (6.4).$$

Тогда, сравнивая (6.1) и (6.4), получим

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} C + \frac{C_0}{4} & -C + \frac{C_0}{4} \\ -C + \frac{C_0}{4} & C + \frac{C_0}{4} \end{pmatrix}.$$

Из (6.4) при условии $C_0 \ll C$ следует

$$\begin{cases} q_1 \approx CU \\ q_2 \approx -CU \end{cases} \Rightarrow q_2 \approx -q_1 \text{ практически при любых значениях } \varphi_1 \text{ и } \varphi_2,$$

когда $\varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$.

Если мы все же поместим на пластины конденсатора такие заряды, что $q_1 + q_2 \neq 0$, то обе пластины конденсатора окажутся под огромным и почти одинаковым потенциалом относительно Земли.

И действительно, из

$$\begin{cases} q_1 = C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \\ q_2 = -C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + C_0 \cdot \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{4} \end{cases}$$

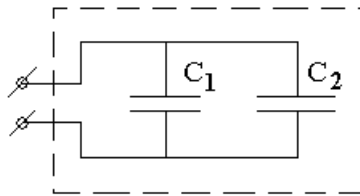
следует

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{q_1 + q_2}{C_0} + \frac{q_1 - q_2}{4C} \approx \frac{q_1 + q_2}{C_0} \\ \varphi_2 = \frac{q_1 + q_2}{C_0} - \frac{q_1 - q_2}{4C} \approx \frac{q_1 + q_2}{C_0} \end{cases}'$$

где при малой величине C_0 потенциалы φ_1 и φ_2 окажутся очень большими.

Экзамен. Электрическая емкость параллельного и последовательного соединения конденсаторов.

Пусть два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены параллельно и помещены в черный ящик, из которого торчат два провода:



Если не знать, что в черном ящике два конденсатора, а не один, то емкость этого одного конденсатора можно найти опытным путем.

Приложим к проводам напряжение U и измерим, какой заряд q протечет по проводам. Тогда $C = \frac{q}{U}$.

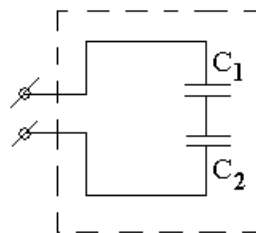
При параллельном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 = U_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$. Тогда

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C = C_1 + C_2.$$

Емкости параллельно соединенных конденсаторов складываются. Аналогично для большего числа параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = \sum_i C_i \text{ — емкость при параллельном соединении конденсаторов.}$$

Рассмотрим теперь последовательное соединение двух конденсаторов.



При последовательном соединении конденсаторов $\begin{cases} U = U_1 + U_2 \\ q = q_1 = q_2 \end{cases}$. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются обратные емкости. Аналогично для большего числа последовательно соединенных конденсаторов:

$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$, где C — емкость при последовательном соединении конденсаторов.

Экзамен. Энергия взаимодействия зарядов.

Рассмотрим пару зарядов:

$$\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2$$

Рассмотрим энергию второго заряда в поле первого заряда:

$$W_2 = q_2 \varphi_2 = q_2 \frac{q_1}{r_{12}}.$$

Найдем теперь энергию первого заряда в поле второго:

$$W_1 = q_1 \varphi_1 = q_1 \frac{q_2}{r_{12}}.$$

Энергии равны $W_1 = W_2$. Возникает вопрос. Это две разные энергии или одна и та же?

Рассмотрим мысленный опыт:

$$\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \longrightarrow \Rightarrow$$

Пусть первый заряд остается неподвижным, а второй заряд медленно уносят на бесконечность.

В этом процессе энергия первого заряда в поле второго изменяется от значения $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ до нуля, но работа над зарядом q_1 не совершается, так как он остается неподвижным.

По закону изменения энергии работа равна изменению энергии. Чтобы избежать противоречия нужно считать, что энергия $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ не принадлежит ни одному, ни другому заряду, а принадлежит сразу двум зарядам в том смысле, что работа над любым из двух зарядов изменяет эту энергию. Чтобы

подчеркнуть эту особенность энергию $\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ называют "энергией взаимодействия".

Для энергии взаимодействия удобна симметричная запись:

$$W = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2).$$

Рассмотрим теперь систему зарядов $\{q_i\}$.

Сила, действующая на каждый заряд, равна сумме сил парных взаимодействий этого заряда с каждым из остальных. При перемещении этого заряда работа электрических сил тоже будет равна сумме работ парных взаимодействий. Тогда и энергия заряда равна сумме энергий его парных взаимодействий.

Энергия заряда q_i в поле остальных зарядов равна $W = q_i \varphi_i$, где φ_i — потенциал поля остальных зарядов в точке расположения заряда q_i .

Энергия всех зарядов равна сумме энергий $W = \sum_i q_i \varphi_i$, но в этом выражении энергия взаимодействия каждой пары зарядов учтена дважды, как энергия одного заряда и как энергия второго заряда. Тогда энергия взаимодействия системы зарядов вдвое меньше суммы энергий всех зарядов.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \text{ — энергия взаимодействия системы зарядов, где } \varphi_i \text{ —}$$

потенциал в точке расположения i -ого заряда, создаваемый остальными зарядами системы.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV.$$

В системе СИ оба выражения для энергии такие же, как в системе СГС Гаусса.