Экзамен. Энергия электрического поля.

Для неподвижных зарядов энергия электрического поля — это то же самое, что и энергия взаимодействия зарядов. Для движущихся зарядов формула для энергии взаимодействия зарядов не верна, но формула для энергии поля, как предполагают, справедлива и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i = \frac{1}{2}\int_V \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi \rho dV = \frac{1}{2}\int_V \varphi \frac{1}{4\pi} div\left(\vec{E}\right) dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV .$$

Здесь набла $\vec{\nabla}$ — это производная. Возьмем последний интеграл по частям, перебросив производную с одного сомножителя ($\vec{E}$) на другой (φ):

$$\frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{E}\right) dV = \frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) - \frac{1}{8\pi}\int_V \left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{E}\right) dV .$$

Здесь первое слагаемое — это внеинтегральный член, просуммированный по краям области интегрирования, при этом сохранена векторная форма скалярного произведения. Второе слагаемое имеет прежнюю векторную форму, но производная берется от другого сомножителя. Доказательство справедливости этого интегрирования по частям в трехмерном пространстве оставим математикам.

Подставим во второй интеграл $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ и получим:

$$W = \frac{1}{8\pi}\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) + \int_V \frac{E^2}{8\pi} dV .$$

Устремим объем к бесконечности. Мы можем это сделать, так как исходный интеграл $\int_V \varphi \rho dV$ можно брать по любому объему, который охватывает все заряды. Чуть позднее докажем, что поверхностный интеграл стремится к нулю при стремлении объема интегрирования к бесконечности. Тогда

$W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ - энергия электрического поля.

$w \equiv \frac{dW}{dV}$ - определение объемной плотности энергии. Тогда

$w = \frac{E^2}{8\pi}$ - объемная плотность энергии электрического поля.

В системе СИ $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

Факультатив. $\oint_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right) \to 0$ при $V \to \infty$.

Докажем, что $\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right)\to 0$ при $V\to\infty$.

Пусть S - большая сфера, радиус которой гораздо больше расстояний между зарядами. И выберем положение сферы так, чтобы все заряды оказались вблизи центра сферы. Тогда для наблюдателя на поверхности сферы все распределение зарядов выглядит как один точечный заряд. =>

$$\left\{\begin{aligned}\varphi &\approx \frac{Q}{r}\\ E &\approx \frac{Q}{r^2}\end{aligned}\right\}.$$

Откуда, с учетом того что векторы $\vec{E}$ и $d\vec{S}$ почти параллельны в каждой точке поверхности, получаем

$$\oint\limits_S \varphi\left(\vec{E},d\vec{S}\right)\approx\oint\limits_S \varphi E\, dS\approx\oint\limits_S \frac{Q}{r}\frac{Q}{r^2}\,dS=\frac{Q^2}{r^3}\oint\limits_S dS=\frac{Q^2}{r^3}\,4\pi r^2=\frac{4\pi Q^2}{r}\xrightarrow[V\to\infty]{}0$$

Что и требовалось доказать.

<u>Факультатив. Рассмотрим парадокс.</u>

Если $q_1q_2<0$, то $W=\dfrac{q_1q_2}{r}<0$. Это с одной стороны. А с другой стороны, если $\dfrac{E^2}{8\pi}>0$, то $W=\int\limits_{V=\infty}\dfrac{E^2}{8\pi}dV>0$. С одной стороны энергия W получилась отрицательная, а с другой стороны — положительная. Противоречие.

При выводе второй формулы для энергии $W=\int\limits_{V=\infty}\dfrac{E^2}{8\pi}dV$ мы воспользовались равенством

$$\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i q_i=\frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\,\rho dV\,,$$

которое на самом деле не выполняется. Причина неравенства в том, что φ_i — потенциал в точке расположения i-го заряда, создаваемый всеми остальными зарядами кроме i-го заряда, а φ — потенциал, создаваемый всеми зарядами.

В результате выражение $W=\dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ не содержит энергию взаимодействия каждого заряда с самим собой. Учесть эту энергию для точечных зарядов невозможно, потому что она бесконечная.

И действительно, рассмотрим один точечный заряд q. По формуле $W=\dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$ получаем, что $W=0$, так как в сумме есть только одно слагаемое, и потенциал φ в этом слагаемом равен нулю, так как это потенциал поля остальных зарядов, которых нет.

Рассмотрим теперь для одного заряда q энергию поля по формуле $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$. Покажем, что энергия в этой формуле бесконечна.

Будем считать, что точечный заряд представляет собой заряженную сферу радиусом R. Найдем энергию поля в виде интеграла $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$, и устремим в полученном выражении радиус сферы R к нулю. Внутри сферы с радиусом R поле $\vec{E}$ равно нулю и интеграл по области $r < R$ можно не брать.

$$W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int\limits_R^\infty \left(\frac{q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2} \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_R^\infty = \frac{q^2}{2R} \quad =>$$

$$W = \frac{q^2}{2R} \xrightarrow[R \to 0]{} \infty$$

Энергия заряженной сферы одинаково стремится к бесконечности по формуле $W = \frac{1}{2} \sum\limits_i q_i \varphi_i$ и по формуле $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ при стремлении радиуса сферы к нулю. Точечный заряд обладает бесконечной энергией взаимодействия друг с другом его частей.

Выражение $W = \frac{1}{2} \sum\limits_i q_i \varphi_i$ не учитывает бесконечную энергию, запасенную внутри каждого точечного заряда, а выражение $W = \int\limits_{V=\infty} \frac{E^2}{8\pi} dV$ учитывает эту энергию, но обращается в бесконечность для точечных зарядов.

Факультатив. Электрон — точечный заряд.

Согласно современным представлениям протоны и нейтроны состоят из кварков, а электроны не имеют структуры и, казалось бы, должны быть точечными объектами.

Точечный заряд должен иметь бесконечную энергию электрического поля, а, следовательно, и бесконечную массу $W = mc^2$.

Масса электрона конечна, отсюда можно найти радиус электрона. Приравняем электрическую энергию заряженной сферы к энергии покоя электрона и получим радиус электрона:

$$\frac{e^2}{2r_e} = m_e c^2 \qquad =>$$

$r_e = \dfrac{e^2}{2m_e c^2}$ — электростатический радиус электрона, e — модуль заряда электрона, m_e — масса покоя электрона. Обычно вместо величины r_e рассматривают вдвое большую величину $r_0 = \dfrac{e^2}{m_e c^2}$, которую называют классическим радиусом электрона.

В системе СИ $r_e = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 10^{-15}$ м, что примерно совпадает с радиусом атомного ядра.

$r_g = \dfrac{2\gamma m_e}{c^2} \approx 10^{-57}$ м — гравитационный радиус электрона или радиус сферы Шварцшильда для электрона. Время на сфере Шварцшильда останавливается. Если электрон сжать до шара с таким радиусом, то он превратится в черную дыру.

Факультатив. Электростатическая энергия заряженного проводника и системы проводников.

Рассмотрим энергию взаимодействия зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i .$$

Все заряды на поверхности одного проводника имеют одинаковый потенциал. Если просуммировать эти слагаемые для k-го проводника, то получим $Q_k \varphi_k$, где φ_k — потенциал k-го проводника, Q_k — полный заряд на k-ом проводнике.

Тогда вместо суммы по всем точечным зарядам получим сумму по всем проводникам:

$W = \dfrac{1}{2}\sum_i Q_i \varphi_i$ — энергия электростатического взаимодействия системы проводников, где i — номер проводника, Q_i — заряд i-ого проводника, φ_i — потенциал i-ого проводника. В системе СИ формула выглядит также.

Для одного проводника получаем

$$W = \frac{Q\varphi}{2}.$$

В частности для проводящего шара $\varphi = \dfrac{Q}{R}$ => $W = \dfrac{Q^2}{2R}$.

Экзамен. Энергия заряженного конденсатора.

Конденсатор — это два проводника. Просуммируем выражение для энергии $W=\frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$ по этим двум проводникам:

$$W=\frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i=\frac{1}{2}\left(q\varphi_1+(-q)\varphi_2\right)=\frac{q}{2}\left(\varphi_1-\varphi_2\right)=\frac{qU}{2}.$$

Это выражение можно заменить на эквивалентные выражения с учетом соотношения $C\equiv\frac{q}{U}$:

$$W=\frac{qU}{2}=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}.$$

Все три выражения справедливы и в системе СИ. Последнее выражение проще запомнить:

$$W=\frac{CU^2}{2}.$$

Электрический диполь.

Экзамен. Потенциал поля точечного диполя.

Издалека любое распределение зарядов выглядит, как один точечный заряд $\varphi(\vec{r})\approx\frac{Q}{r}$. Здесь начало координат выбрано где-то вблизи зарядов, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения потенциала. К этому выражению можно сделать поправки в виде ряда по степеням $\frac{1}{r}$:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{Q}{r}+\frac{f_2(\theta,\varphi)}{r^2}+\frac{f_3(\theta,\varphi)}{r^3}+\frac{f_4(\theta,\varphi)}{r^4}+\frac{f_5(\theta,\varphi)}{r^5}+\ldots$$

Слагаемые этого ряда имеют названия: потенциал точечного заряда, потенциал точечного диполя, потенциал точечного квадруполя, потенциал точечного октуполя, потенциал точечного гексадекаполя и т. д.

Точное выражение для потенциала имеет вид:

$$\varphi(\vec{r})=\sum_i\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}.$$

Найдем первые два слагаемых разложения этого потенциала по степеням $\frac{1}{r}$.

$\left|\vec{r}\right|>>\left|\vec{r}_i\right|$ => $\frac{\vec{r}_i}{r}$ — малый параметр задачи. Найдем отрезок ряда Тейлора по степеням $\vec{r}_i$ и автоматически получим требуемое разложение по $\frac{1}{r}$.

Разложение в ряд Тейлора функции в трехмерном пространстве проведем аналогично разложению функции с одномерным аргументом.

$$\left.\begin{aligned} & f(x) = f(0) + x\cdot\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} + \dots \\ & x \to \vec{r}_i \\ & f(x) \to \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \end{aligned}\right\} \quad => \quad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left.\left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right)$$

Здесь $\vec{\nabla}_i$ - производная по координатам вектора $\vec{r}_i$.

Докажем, что для любой функции $f(\vec{r}-\vec{r}_i)$ от разности векторов $(\vec{r}-\vec{r}_i)$ справедливо следующее соотношение:

$\vec{\nabla}_i f(\vec{r}-\vec{r}_i) = -\vec{\nabla} f(\vec{r}-\vec{r}_i)$.

И действительно:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{r}-\vec{r}_i) = \frac{\partial f(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\partial(x-x_i)}\cdot\frac{\partial(x-x_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial f(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\partial(x-x_i)} \\ & \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{r}-\vec{r}_i) = \frac{\partial f(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\partial(x-x_i)}\cdot\frac{\partial(x-x_i)}{\partial x} = +\frac{\partial f(\vec{r}-\vec{r}_i)}{\partial(x-x_i)} \end{aligned}\right\} \quad => \quad \vec{\nabla}_i = -\vec{\nabla}$$

=>

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left.\left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \left.\left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right) \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right).$$

Найдем $\vec{\nabla}\dfrac{1}{r}$:

$$\left.\begin{aligned} & \varphi = \frac{q}{r} \\ & \vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ & \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{aligned}\right\} \quad => \quad q\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\frac{q}{r} \quad => \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Подставим это выражение в разложение $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$ по степеням $\vec{r}_i$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}_i, \vec{r})}{r^3}$$

Подставим это разложение в выражение для потенциала:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \sum_i q_i\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}_i,\vec{r})}{r^3}\right) = \frac{\sum\limits_i q_i}{r} + \frac{\left(\sum\limits_i q_i\vec{r}_i, \vec{r}\right)}{r^3} = \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

Здесь введено обозначение

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ - дипольный момент распределения зарядов.

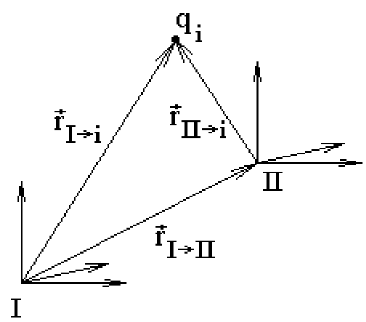
Тогда $\varphi(\vec{r}) \approx \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$, где $\frac{Q}{r}$ - потенциал заряда, $\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$ - потенциал диполя.

$\varphi = \frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$ — потенциал точечного диполя.

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ — определение дипольного момента системы зарядов $\{q_i\}$.

<u>**Факультатив. Изменение дипольного момента при переходе от одной системы отсчета к другой.**</u>

Пусть $\vec{r}_{I\to II}$ — положение второй системы отсчета относительно первой, $\vec{r}_{I\to i}$ — радиус-вектор заряда q_i в первой системе отсчета, $\vec{r}_{II\to i}$ — радиус-вектор заряда q_i во второй системе отсчета.



Из рисунка видно, что $\vec{r}_{II\to i} = \vec{r}_{I\to i} - \vec{r}_{I\to II}$. Обозначим дипольный момент относительно первой системы отсчета за $\vec{p}_I$, а относительно второй системы — $\vec{p}_{II}$. Тогда

$$\vec{p}_{II} = \sum_i q_i \vec{r}_{II\to i} = \sum_i q_i \cdot (\vec{r}_{I\to i} - \vec{r}_{I\to II}) = \sum_i q_i \vec{r}_{I\to i} - \left(\sum_i q_i\right) \cdot \vec{r}_{I\to II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I\to II}$$

$$\vec{p}_{II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I\to II}$$

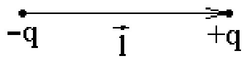
Здесь $\vec{p}_{II}$ — дипольный момент во второй системе отсчета, $\vec{p}_I$ — дипольный момент в первой системе отсчета, Q — полный заряд системы, $\vec{r}_{I\to II}$ — положение второй системы отсчета относительно первой.

<u>**Экзамен. $\vec{p}_{II} = \vec{p}_I$ при $Q = 0$.**</u>

Дипольный момент не зависит от системы координат, если полный заряд системы равен нулю. Обычно дипольный момент системы зарядов рассматривают только в том случае, если полный заряд системы равен нулю. Следовательно, обычно величина дипольного момента не зависит от положения начала координат.

Экзамен. Простейший электрический диполь.

Простейший электрический диполь — это пара точечных зарядов противоположных знаков и одинаковых по модулю.



$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i = q\vec{l} \qquad =>$$

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Здесь $\vec{p}$ — дипольный момент пары зарядов $-q$ и $+q$, $\vec{l}$ — вектор направленный из заряда $-q$ к заряду $+q$.