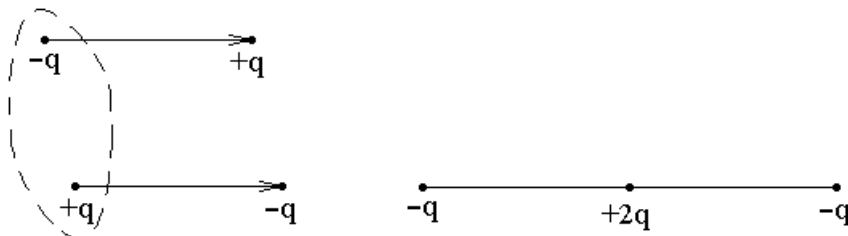


Факультатив. Простейший квадруполь, октуполь, гексадекаполь и т.д.

Если точечный заряд продублировать, поменять знак и сдвинуть, то полученная пара зарядов образует простейший диполь.

Если заряды простейшего диполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший квадруполь.



На рисунке приведены два варианта квадруполей.

Если заряды простейшего мультиполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший мультиполь следующего порядка.

Экзамен. Напряженность поля точечного диполя.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\vec{\nabla} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3}$$

Раскроем последнее выражение, как производную от произведения (\vec{p}, \vec{r}) на $\frac{1}{r^3}$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{r^3} = -\frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla} (\vec{p}, \vec{r}) - (\vec{p}, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}$$

Вычислим отдельно каждую из производных в последнем выражении.

Сначала вычислим $\vec{\nabla} (\vec{p}, \vec{r})$.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} (p_x x + p_y y + p_z z) = p_x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} (\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p}$$

Вычислим теперь $\vec{\nabla} \frac{1}{r^3}$.

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \vec{\nabla} \left(\left(\frac{1}{r} \right)^3 \right) = 3 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

Найдем $\vec{\nabla} \frac{1}{r}$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{r} \\ \vec{E} &= q \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow q \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \frac{q}{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Тогда

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = 3 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = 3 \left(\frac{1}{r} \right)^2 \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Подставим $\begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p} \\ \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5} \end{cases}$ в $\vec{E} = -\frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{r}) - (\vec{p}, \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}, \text{ где } \vec{r} \text{ — вектор, направленный из диполя } \vec{p} \text{ в точку}$$

наблюдения.

Факультатив. Напряженность поля точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя.

Без доказательства:

$$\vec{E} = 3 \frac{(\vec{p}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3} \pi \vec{p} \cdot \delta(\vec{r}).$$

Здесь $\delta(\vec{r})$ — дельта-функция Дирака. Для дельта-функции по определению:

$$\text{при } \vec{r} \neq 0: \delta(\vec{r}) = 0,$$

$$\text{при } \vec{r} = 0: \delta(\vec{r}) = \infty,$$

$$\int_{V=\infty} \delta(\vec{r}) \cdot dV = 1.$$

$V=\infty$

$\delta(\vec{r})$ — очень узкая и очень высокая функция.

Для точечного заряда q_0 , расположенного в точке \vec{r}_0 , объемная плотность заряда:

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Экзамен. Момент сил, действующих на точечный диполь в электрическом поле.

Рассмотрим систему зарядов $\{q_i\}$, близко расположенных друг к другу. Суммарный момент внутренних сил равен нулю в соответствии с третьим законом Ньютона. Тогда момент сил, действующих на систему зарядов, можно найти, как сумму моментов внешних сил, действующих на каждый из зарядов:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, q_i \vec{E}_i].$$

Если расстояния между зарядами малы, то напряженности внешнего электрического поля в точках расположения разных зарядов примерно равны $\vec{E}_i \approx \vec{E}$. \Rightarrow

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, q_i \vec{E}_i] \approx \sum_i [\vec{r}_i, q_i \vec{E}] = \sum_i [q_i \vec{r}_i, \vec{E}] = \left[\sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{E} \right] = [\vec{p}, \vec{E}] \Rightarrow$$

$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$, где \vec{M} — момент сил, \vec{p} — дипольный момент, \vec{E} — внешнее по отношению к диполю электрическое поле.

Экзамен. Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле.

Сумма внутренних сил между зарядами диполя равна нулю по третьему закону Ньютона. Тогда силу, действующую на диполь, можно найти, как сумму внешних сил, действующих на отдельные заряды диполя:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i \vec{E}_i.$$

Если, как и в предыдущем вопросе считать, что $\vec{E}_i \approx \vec{E}$, то для диполя с нулевым суммарным зарядом суммарная сила будет равна нулю. В таком случае для определения величины силы потребуется учесть небольшое различие величин $\vec{E}_i = \vec{E}(\vec{r}_i)$ в точках \vec{r}_i расположения разных зарядов q_i рассматриваемого диполя. Чтобы учесть это различие, разложим напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ в ряд Тейлора по степеням \vec{r} в малой окрестности рассматриваемого диполя.

Поместим начало координат вблизи зарядов диполя. Рассмотрим разложение x -проекции поля \vec{E} в ряд Тейлора в точке расположения заряда q_i . Это разложение по степеням радиус-вектора \vec{r}_i . По аналогии с одномерным рядом Тейлора:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \approx f(0) + x \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} \\ x \rightarrow \vec{r}_i \\ f(x) \rightarrow E_{ix} = E_x(\vec{r}_i) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$E_{ix} = E_x(\vec{r}_i) \approx E_x(0) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla} E_x \Big|_{\vec{r}_i=0} \right) = E_x + (\vec{r}_i, \vec{\nabla} E_x) = E_x + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) E_x$$

\Rightarrow

$$\vec{E}_i \approx \vec{E} + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) \vec{E} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_i \approx \sum_i q_i \left\{ \vec{E} + (\vec{r}_i, \vec{\nabla}) \vec{E} \right\} = \vec{E} \cdot \sum_i q_i + \left(\sum_i q_i \vec{r}_i, \vec{\nabla} \right) \vec{E} = Q\vec{E} + (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

В последнем выражении первое слагаемое — сила, действующая на полный заряд системы зарядов, а второе слагаемое — сила, действующая на диполь.

$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$ — сила, действующая на точечный диполь, где \vec{F} — сила, \vec{p} — дипольный момент, \vec{E} — электрическое поле.

Экзамен. Энергия диполя в электрическом поле.

Рассмотрим правило "бац минус цап"

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ для векторов \vec{p} , $\vec{\nabla}$, \vec{E} и получим

$$[\vec{p}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{p}, \vec{\nabla}).$$

В левой части равенства $[\vec{p}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = [\vec{p}, \text{rot}(\vec{E})]$, но по теореме о циркуляции электростатического поля в дифференциальной форме $\text{rot}(\vec{E}) = 0$.

Тогда $[\vec{p}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{p}, \vec{\nabla}) = 0 \Rightarrow$

$$\vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) = \vec{E}(\vec{p}, \vec{\nabla}) = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Тогда из $\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$ следует $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E})$.

Для любой природы сил, если $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$, то W — потенциальная энергия.

Тогда из $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}, \vec{E}) = -\vec{\nabla}(-(\vec{p}, \vec{E}))$ следует, что

$W = -(\vec{p}, \vec{E})$ — энергия точечного диполя в электрическом поле.

Факультатив. Энергия наведенного диполя.

Формула $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ безусловно справедлива для жесткого диполя, который может поворачиваться в поле \vec{E} , но в котором заряды не могут изменять взаимного расположения. Некоторые молекулы не имеют дипольного момента, пока нет внешнего поля \vec{E} . При включении поля \vec{E} положительные заряды молекулы смещаются по полю, а отрицательные — против поля. В результате молекула приобретает так называемый наведенный дипольный момент пропорциональный полю: $\vec{p} = \alpha \vec{E}$, где α — поляризуемость молекулы.

Наведенный диполь имеет две разных энергии:

$W_1 = -(\vec{p}, \vec{E})$ — чисто электрическая энергия, которая зависит только от расположения зарядов диполя и не зависит от природы диполя жесткого или наведенного.

Вторая энергия $W_2 = +\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E})$ — энергия упругих сил внутри молекулы, которые пытаются вернуть заряды на исходное место.

С учетом этих двух энергий энергия наведенного диполя:

$$W = -\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E})$$

Обычно под энергией наведенного диполя подразумевают именно эту величину, полученную с учетом энергии упругих сил, пытающихся вернуть заряды диполя на свои места, занимаемые без внешнего поля.

Электростатика диэлектриков.

Диэлектрик — материал, в котором не течет ток под действием постоянного электрического поля.

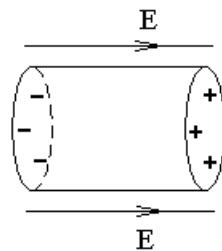
Экзамен. Поляризация диэлектрика и связанные заряды.

В электрическом поле некоторые молекулы ведут себя, как жесткие диполи, например HF, другие — как наведенные диполи, например N₂.

Жесткие диполи поворачиваются вдоль поля, а наведенные — наводятся вдоль поля.

В любом случае под действием электрического поля положительные заряды смещаются по полю \vec{E} , а отрицательные — против поля.

Если электрическое поле одинаковое в разных точках диэлектрика, то при смещении зарядов в объеме диэлектрика заряды не появляются. Не скомпенсированные заряды появляются на торцах диэлектрика.



Эти заряды называются связанными зарядами.

Будем называть заряды связанными, если это макроскопические заряды, которые образуются только в результате смещения зарядов внутри каждой молекулы. Любые другие заряды будем называть свободными.

Все заряды либо связанные, либо свободные.

Введем обозначения:

ρ — плотность свободных зарядов,

ρ' — плотность связанных зарядов,

$\rho + \rho'$ — плотность всех зарядов.

$\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$ — поляризация среды, объемная плотность дипольного момента

или дипольный момент единицы объема.

Если n — концентрация молекул или число молекул в единице объема, то, разделив дипольный момент единицы объема \vec{P} на число молекул в единице объема n , получим средний дипольный момент молекулы $\frac{\vec{P}}{n} = \langle \vec{p} \rangle$.

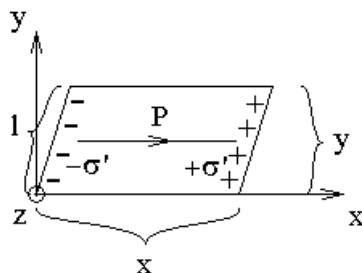
Тогда

$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle$, где \vec{P} — поляризация среды, n — концентрация молекул, $\langle \vec{p} \rangle$ — средний дипольный момент молекулы.

Найдем связь между величиной поляризации и плотностью связанных зарядов.

При поляризации среды положительные связанные заряды смещаются вдоль вектора поляризации, а отрицательные — навстречу поляризации.

Рассмотрим наклонный параллелепипед, который поляризован вдоль одного из ребер:



Рассмотрим два выражения для дипольного момента всего куска диэлектрика и приравняем их друг к другу:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = P \cdot V = P \cdot xyz \\ p = Q' \cdot x = \sigma' \cdot S \cdot x = \sigma' \cdot lz \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$yP = \sigma' l \quad \Rightarrow$$

$$\sigma' = \frac{y}{l} P = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, d\vec{S}}) = P_n.$$

На границе диэлектрик-вакуум образуются связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Аналогично на границе двух диэлектриков:

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ — скачок нормальной составляющей поляризации на границе двух диэлектрических сред определяется поверхностной плотностью связанных зарядов σ' , здесь нормаль направлена из среды 1 в среду 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Заметим, что поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$. Чтобы понять это представим себе, что рассматриваемый параллелепипед разрезан надвое произвольной плоскостью. Раздвинем две части параллелепипеда вправо и влево. На двух новых границах появятся связанные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Соединим две части параллелепипеда обратно. Заряды на двух новых границах скомпенсируют друг друга и пропадут. Это означает, что через единицу площади границы между двумя частями параллелепипеда переместились заряды $\sigma' = P_n$, чтобы скомпенсировать заряды противоположного знака. Следовательно, в процессе поляризации диэлектрика через эту плоскость параллельную пропавшей границе прошли заряды с поверхностной плотностью $\sigma' = P_n$. Напомним, что

направление плоскости выбрано произвольно. Следовательно, процесс поляризации среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим диэлектрик, который по-разному поляризован в разных точках.

Мысленно выделим внутри этого диэлектрика некоторый объем V .

Рассмотрим единичную площадку на поверхности S этого объема.

Через эту единичную площадку при поляризации диэлектрика перемещается заряд $\sigma' = P_n$, так как поляризация среды смещает через любую единичную площадку внутри диэлектрика заряд $\sigma' = P_n$.

Рассмотрим, какой заряд Q' смещается через замкнутую поверхность S , которая является границей объема V .

$$Q' = \oint_S dQ' = \oint_S \sigma' dS = \oint_S P_n dS = \oint_S (\vec{P}, d\vec{S})$$

Смещается заряд, равный потоку вектора поляризации через замкнутую поверхность.

Заряд, который остается внутри замкнутой поверхности S отличается знаком:

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \quad \text{— связь потока поляризации через границу объема и}$$

связанного заряда Q' внутри объема.

Разделим это равенство на объем V и устремим объем к нулю:

$$\oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = -Q' \quad \left| \frac{1}{V}; \quad |V \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = -\rho'$$