Экзамен. Поляризация диэлектрика и связанные заряды (продолжение).

Рассмотрим три формы трех соотношений для диэлектриков. Во-первых:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi\left(Q + Q'\right) \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\left(\sigma + \sigma'\right) \end{cases}$$

для микроскопического внутриатомного поля $\vec{E}$, так как на микроскопическом внутриатомном уровне свободные и связанные заряды равноправны.

Под напряженностью электрического поля $\vec{E}$ в диэлектрике будем понимать усредненное микроскопическое поле $\vec{E}$ по макроскопическому, но малому, объему. Следовательно, для напряженности поля $\vec{E}$ в диэлектрике будут выполняться те же соотношения, что и для микроскопического внутриатомного поля $\vec{E}$.

Дополним эти уравнения следующими соотношениями:

$$\begin{cases} div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Здесь, как и раньше, единичный вектор нормали к границе направлен из объема 1 в объем 2: $\vec{n} \equiv \vec{n}_{1\to 2}$.

Экзамен. Два способа вычисления электростатического потенциала φ, создаваемого поляризованным диэлектриком.

1-ый способ — вычисление потенциала связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{q}{r}$ и получим:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \frac{\rho'\left(\vec{r}\,'\right)\cdot dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} + \oint\limits_{S'} \frac{\sigma'\left(\vec{r}\,'\right)\cdot dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

2-ой способ — вычисление потенциала молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\varphi = \dfrac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$ и получим:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \frac{\left(\vec{P}\left(\vec{r}\right), \vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

Оба интегральных выражения для потенциала имеют особую точку при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$, в которой знаменатель подынтегральных выражений обращается в ноль. Эта особая точка является интегрируемой особенностью. И действительно, если сделать замену переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на переменную $\vec{r}_0 = \vec{r}\,' - \vec{r}$, то в окрестности особой точки получим:

$$dV' = 4\pi r_0^2 dr_0 \quad \text{и} \quad dS' = 2\pi r_0 dr_0 .$$

Тогда после сокращения r_0 в знаменателе и числителе подынтегральных выражений особая точка пропадает. В этом смысле рассматриваемая особая точка — интегрируемая особая точка.

<u>Факультатив. Два способа вычисления электростатического поля Е, создаваемого поляризованным диэлектриком.</u>

1-ый способ — вычисление напряженности поля связанных зарядов. Для каждого связанного заряда воспользуемся формулой $\vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ и получим:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\rho'(\vec{r}\,')\cdot dV' + \oint\limits_{S'} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\sigma'(\vec{r}\,')\cdot dS'$$

Особая точка в интеграле по объему — интегрируемая особенность, которая пропадает при замене переменной интегрирования, а особая точка в интеграле по поверхности — это неинтегрируемая особенность. Причина этого в том, что при условии $\vec{r}\,' = \vec{r}$ точка наблюдения находится на поверхности со связанными зарядами, а напряженность поля $\vec{E}$ испытывает скачок при переходе через заряженную поверхность. То есть, поле $\vec{E}$ не имеет определенного значения на заряженной поверхности диэлектрика.

2-ой способ — вычисление напряженности поля молекулярных диполей. Для каждого диполя воспользуемся формулой $\vec{E} = 3\dfrac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \dfrac{\vec{p}}{r^3} - \dfrac{4}{3}\pi\cdot\vec{p}\cdot\delta(\vec{r})$, заменим здесь $\vec{r} \to (\vec{r}-\vec{r}\,')$ и $\vec{p} \to \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot dV'$, просуммируем поле $\vec{E}$ по диполям всего объема $\int\limits_{V'}\bullet$ и получим поле $\vec{E}$ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{V'}\left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)\cdot dV' - \frac{4}{3}\pi\cdot\int\limits_{V'}\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot dV'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \int\limits_{V'}\left(3\frac{\left(\vec{P}(\vec{r}\,'),\vec{r}-\vec{r}\,'\right)\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^5} - \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)\cdot dV' - \frac{4}{3}\pi\cdot\vec{P}(\vec{r})$$

Здесь интеграл содержит неинтегрируемую в обычном смысле особую точку. Но интеграл по объему имеет определенное значение, если рассматривать интеграл в смысле главного значения. В окрестности особой точки мысленно вырезают шар с малым радиусом r_0 и с центром в особой точке. В объеме без этого шара интеграл берется и имеет определенное значение. Интеграл в смысле главного значения - это предел, к которому стремится интеграл по объему без шара при стремлении радиуса шара к нулю.

Экзамен. Вектор электрической индукции или электрического смещения.

$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ — определение вектора электрической индукции или электрического смещения.

В СИ: $\vec{D} \equiv \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

Рассмотрим дивергенцию поля $\vec{D}$:

$$div\left(\vec{D}\right) = div\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right) = div\left(\vec{E}\right) + 4\pi \cdot div\left(\vec{P}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) + 4\pi \cdot \left(-\rho'\right) = 4\pi\rho$$

$$=> \quad div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$$

Аналогичные выражения можно получить в интегральной форме $\Phi_D = 4\pi Q$ и для границы раздела сред $D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$. Здесь величины ρ, Q, σ относятся только к свободным зарядам.

В СИ: $div\left(\vec{D}\right) = \rho$

Четыре основных формулы для диэлектриков в трех формах:

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \oint\limits_S \left(\vec{P}, d\vec{S}\right) = -Q' \\ P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi\left(Q + Q'\right) \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\left(\sigma + \sigma'\right) \end{cases}$$

В этих формулах, как и обычно, нормаль к границе раздела направлена из объема 1 в объем 2: $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$.

В системе СИ: $$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = \rho \\ div\left(\vec{E}\right) = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho + \rho'\right) \\ div\left(\vec{P}\right) = -\rho' \\ \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \end{cases}$$

Экзамен. Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость среды.

$\vec{P} \equiv \chi\vec{E}$ — определение χ — диэлектрической восприимчивости среды.

В системе СИ: $\vec{P} \equiv \varepsilon_0\chi\vec{E}$.

Связь величин $\vec{P}$ и $\vec{E}$ не всегда линейна, но для линейной связи можно ввести диэлектрическую восприимчивость среды.

В кристаллах χ — матрица или тензор второго ранга.

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \text{ или } P_i = \sum_k \chi_{ik} E_k .$$

Тензор диэлектрической восприимчивости — симметричный тензор (без доказательства):

$\chi_{ik} = \chi_{ki}$.

$\vec{D} \equiv \varepsilon \vec{E}$ — определение ε — диэлектрической проницаемости среды.

$\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi\vec{E} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$ =>

$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ — связь диэлектрической проницаемости и диэлектрической восприимчивости среды.

$\chi = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}$, откуда $\vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$

$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, так как $\chi_{ik} = \chi_{ki}$

В системе СИ: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \\ \varepsilon = 1 + \chi \end{cases}$

Факультатив. Связанные заряды обычно присутствуют только на поверхности диэлектрика.

$\rho' = -div(\vec{P}) = -div(\chi\vec{E})$

Внутри однородного диэлектрика $\chi = const$ и эту константу можно вынести за знак производной:

$\rho' = -div(\chi\vec{E}) = -\chi \cdot div(\vec{E}) = -\chi \cdot 4\pi(\rho + \rho')$ => $\rho' = -\chi \cdot 4\pi(\rho + \rho')$

=> $\rho' = -\dfrac{4\pi\chi}{1 + 4\pi\chi}\rho$

Если диэлектрик однородный и в объеме диэлектрика нет свободных зарядов $\rho = 0$, то нет и связанных $\rho' = 0$.

Экзамен. Алгоритм решения симметричных задач с диэлектриками.

Алгоритм решения задач:

$$\Phi_D = 4\pi Q \quad => \quad DS = 4\pi Q \quad => \quad D = \frac{4\pi Q}{S} \quad => \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \quad =>$$

$$\begin{cases} \vec{P} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E} & => \quad \sigma' = -\left(P_{2n} - P_{1n}\right) \\ \varphi(\vec{r}) = \displaystyle\int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl & \end{cases}$$

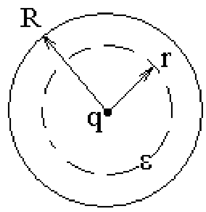
Экзамен. Простейшие задачи с диэлектриками. 1. Сферическая симметрия.

Рассмотрим задачу. Дан диэлектрический шар с проницаемостью ε и радиусом R. В центре шара находится точечный заряд q.

Найти: $\vec{D}, \vec{E}, \varphi, \vec{P}, \sigma'$.

Решение.

В соответствии с симметрией задачи рассмотрим пунктирную сферу с произвольным радиусом r, центр которой совпадает с центром диэлектрического шара. Применим электростатическую теорему Гаусса $\Phi_D = 4\pi Q$ для поверхности выбранной сферы.



Из симметрии задачи следует, что вектор электрической индукции $\vec{D}$ направлен по радиусу в любой точке пространства, и во всех точках пунктирной сферы вектор $\vec{D}$ имеет одинаковую длину. Тогда

$$\Phi_D = 4\pi Q \quad => \quad DS = 4\pi q \quad => \quad D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \quad =>$$

$$D = \frac{q}{r^2}$$

Этот вывод справедлив и в том случае, если $r \le R$, и в том случае, если $r \ge R$.

Найдем теперь вектор $\vec{E}$ из равенства $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.

$E = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ - внутри диэлектрического шара при $r < R$,

$E = D = \dfrac{q}{r^2}$ - снаружи диэлектрического шара при $r > R$.

Найдем теперь потенциал φ сначала снаружи шара при $r \ge R$.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl = \int_{r}^{\infty} E\,dr = \int_{r}^{\infty} \frac{q}{r^2} dr = q \cdot \int_{r}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{r} \quad =>$$

$\varphi = \dfrac{q}{r}$ при $r \ge R$.

Теперь найдем потенциал внутри диэлектрического шара.

$$\varphi(\vec r) = \int_{\vec r}^{\infty} E_l dl = \int_r^{\infty} E\,dr = \int_r^{R} E\,dr + \int_R^{\infty} E\,dr = \int_r^{R} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr + \varphi(R) =$$

$$= \frac{q}{\varepsilon} \cdot \int_r^{R} \frac{dr}{r^2} + \frac{q}{R} = \frac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + \frac{q}{R}$$

$\varphi(\vec r) = \dfrac{q}{\varepsilon} \cdot \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R} \right) + \dfrac{q}{R}$ при $r \le R$.

Найдем теперь поляризацию среды $\vec P$.

$\vec P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} \vec E$ =>

$P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ при $r < R$ и $P = 0$ при $r > R$.

И, наконец, найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрического шара.

$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$

Пусть объем 1 — диэлектрик, а объем 2 — вакуум, тогда

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = P_{1n} = P(R) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \frac{q}{\varepsilon R^2}$$

Повторим ответы:

$D = \dfrac{q}{r^2}$ внутри и снаружи шара,

$E = \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ при $r < R$, $E = \dfrac{q}{r^2}$ при $r > R$,

$\varphi = \dfrac{q}{r}$ при $r \ge R$, $\varphi = \dfrac{q}{R} - \dfrac{q}{\varepsilon R} + \dfrac{q}{\varepsilon r}$ при $r \le R$,

$P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot \dfrac{q}{\varepsilon r^2}$ при $r < R$, $P = 0$ при $r > R$,

$\sigma' = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \cdot \dfrac{q}{R^2}$.