Экзамен. Векторный потенциал.

$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ — векторный потенциал элемента тока $I \cdot d\vec{l}$ на расстоянии r от элемента тока.

В системе СИ: $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r}$.

Выражение $d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ похоже на выражение $\varphi = \frac{q}{r}$, где φ — скалярный потенциал. Поэтому $\vec{A}$ называют векторным потенциалом, хотя к потенциальной энергии он не имеет никакого отношения.

Рассмотрим $rot\left(d\vec{A}\right)$:

$$rot\left(d\vec{A}\right) = \left[\vec{\nabla}, \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[\vec{\nabla}, \frac{1}{r} d\vec{l}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[\vec{\nabla}\frac{1}{r}, d\vec{l}\right].$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, что следует из $\begin{cases} \varphi = \frac{q}{r} \\ \vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases}$, и получим

$$rot\left(d\vec{A}\right) = \frac{I}{c} \cdot \left[\vec{\nabla}\frac{1}{r}, d\vec{l}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[-\frac{\vec{r}}{r^3}, d\vec{l}\right] = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}, \frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$$

Сравним этот результат с законом Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$ и получим:

$rot\left(d\vec{A}\right) = d\vec{B}$ =>

$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$ — связь магнитного поля $\vec{B}$ и векторного потенциала $\vec{A}$.

$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r}$ =>

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \cdot dV'$$

Факультатив. Потенциалы переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r},t) = \dfrac{q\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\ d\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{I\left(\vec{r}\,',t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\cdot d\vec{l}}{c|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \end{cases}$$

Потенциалы зависят от зарядов и токов в предшествующий момент времени. Момент времени предшествует на время распространения сигнала $\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ от источника в точке $\vec{r}\,'$ до точки наблюдения $\vec{r}$.

Интересно, что $\begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ — 4-х вектор относительно преобразований Лоренца, так же как $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Точнее и подробнее этот вопрос можно будет рассмотреть в конце курса.

Факультатив. Дивергенция векторного потенциала.

$$div\left(\vec{A}\right) = 0$$

Это равенство справедливо только для постоянных токов. Формулу нужно знать на экзамене. Доказательство формулы на экзамене знать не нужно.

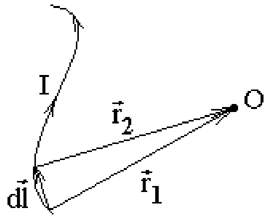
Это равенство можно доказать только для замкнутых токов. Постоянные токи замкнуты.

Сначала рассмотрим дивергенцию векторного потенциала для элемента тока, а не для замкнутого контура с током.

$$div\left(d\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}, \frac{I}{c}\cdot\frac{d\vec{l}}{r}\right) = \frac{I}{c}\cdot\left(\vec{\nabla}, \frac{1}{r}d\vec{l}\right) = \frac{I}{c}\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}, d\vec{l}\right)$$

Подставим сюда $\vec{\nabla}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, что следует из $\begin{cases} \varphi = \dfrac{q}{r} \\ \vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{cases}$, и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{I}{c}\cdot\left(-\frac{\vec{r}}{r^3},d\vec{l}\right)=-\frac{I}{c}\cdot\frac{\left(\vec{r},d\vec{l}\right)}{r^3}$$



Из рисунка видно, что

$\vec{r}_1=d\vec{l}+\vec{r}_2$ => $d\vec{l}=-\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)=-d\vec{r}$

Подставим это в выражение для $div\left(d\vec{A}\right)$ и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{I}{c}\cdot\frac{\left(\vec{r},d\vec{r}\right)}{r^3}$$

Рассмотрим

$$d\left(\vec{r},\vec{r}\right)=\left(d\vec{r},\vec{r}\right)+\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=2\left(\vec{r},d\vec{r}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\vec{r},d\vec{r}\right)=\frac{1}{2}d\left(\vec{r},\vec{r}\right)$$

Подставим это в выражение для $div\left(d\vec{A}\right)$ и получим

$$div\left(d\vec{A}\right)=\frac{I}{c}\cdot\frac{\frac{1}{2}d\left(\vec{r},\vec{r}\right)}{r^3}=\frac{I}{2c}\cdot\frac{d\left(r^2\right)}{r^3}=\frac{I}{2c}\cdot\frac{2rdr}{r^3}=\frac{I}{c}\cdot\frac{dr}{r^2}=-d\left(\frac{I}{cr}\right)$$

Теперь от рассмотрения одного элемента тока перейдем к рассмотрению замкнутого контура с током.

$$div\left(\vec{A}\right)=\oint_l div\left(d\vec{A}\right)=\oint_l\left(-d\left(\frac{I}{cr}\right)\right)=-\oint_l d\left(\frac{I}{cr}\right)$$

Заметим, что для любой функции $\oint_l d\left(\cdot\right)=0$, тогда

$$div\left(\vec{A}\right)=0$$

Факультатив. Уравнение Пуассона для векторного потенциала.

Из электростатики мы знаем, что для любой функции координат φ, которую можно представить в виде

$$\varphi\left(\vec{r}\right)=\int_{V'}\frac{\rho\left(\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\cdot dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$\Delta\varphi=-4\pi\rho$.

Заменим в этих двух равенствах и во всех выкладках между ними

$\begin{cases} \varphi \to \vec{A} \\ \rho \to \dfrac{\vec{j}}{c} \end{cases}$ и получим что для любой функции координат $\vec{A}$, которую можно представить в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

оказывается справедливо уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,.$$

Таким образом, получаем

$\Delta\vec{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$ — уравнение Пуассона для векторного потенциала. Формулу без доказательства нужно знать на экзамене.

Заметим, что для каждой проекции векторного потенциала получается уравнение аналогичное уравнению электростатики $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Следовательно, найти векторный потенциал можно, решив три задачи электростатики с плотностями зарядов: $\dfrac{1}{c}j_x$, $\dfrac{1}{c}j_y$ и $\dfrac{1}{c}j_z$. Хотя обычно так никто не поступает.

Экзамен. Ротор магнитного поля B постоянных токов.

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \qquad \Rightarrow \qquad rot\left(\vec{B}\right) = rot\left(rot\left(\vec{A}\right)\right) = \left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right]\right]$$

Разложим правую часть равенства по правилу "бац минус цап" и получим

$$rot\left(\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) - \vec{A}\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как $\left(\vec{\nabla}, \vec{A}\right) = div\left(\vec{A}\right) = 0$, тогда

$$rot\left(\vec{B}\right) = -\vec{A}\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right) = -\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Rightarrow$$

$rot\left(\vec{B}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$ — магнитное поле $\vec{B}$ закручено вокруг токов по правилу правого винта.

В системе СИ: $rot\left(\vec{B}\right) = \mu_0\vec{j}$.

Экзамен. Дивергенция магнитного поля B.

$$div\left(\vec{B}\right) = div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right]\right)$$

Циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении не изменяет его величины. Тогда

$$div\left(\vec{B}\right) = \left(\vec{A}, \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right]\right)$$

Векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, поэтому

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right] = 0 \qquad =>$$

$$div\left(\vec{B}\right) = 0$$

Это равенство доказано нами для магнитного поля постоянных токов. Максвелл предположил, что оно справедливо и для переменных электромагнитных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом, следовательно, равенство справедливо и для переменных полей.

Экзамен. Поток магнитного поля B через замкнутую поверхность.

По теореме Гаусса-Остроградского $\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int\limits_V div\left(\vec{B}\right) \cdot dV$, но $div\left(\vec{B}\right) = 0$.

Тогда

$$\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \qquad =>$$

Для любого объема, сколько линий втекает столько и вытекает. =>

Линии поля $\vec{B}$ нигде не начинаются и не заканчиваются. =>

Линии поля $\vec{B}$ замкнуты.

Факультатив. Поток поля магнитных зарядов.

Если удастся найти магнитные заряды, то кроме замкнутых вокруг токов линий магнитного поля появятся линии магнитного поля, которые должны выходить из положительных магнитных зарядов и входить в отрицательные магнитные заряды.

Если поток магнитного поля через замкнутую поверхность отличен от нуля, то в объеме, ограниченном этой поверхностью есть магнитные заряды.

Экзамен. Циркуляция магнитного поля B.

(или теорема о циркуляции поля $\vec{B}$ в интегральной форме)

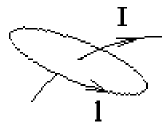
По теореме Стокса циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через площадку ограниченную контуром:

$$\oint\limits_l B_l dl = \int\limits_S \left(rot\left(\vec{B}\right), d\vec{S}\right).$$

Но ранее мы выяснили, что $rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, тогда

$$\oint_l B_l dl = \int_S \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j}, d\vec{S} \right) = \frac{4\pi}{c} \cdot \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S} \right) = \frac{4\pi}{c} \cdot \int_S dI = \frac{4\pi}{c} I \qquad =>$$

$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I$, где I — токи пронизывающие контур интегрирования. Для положительных токов I направление обхода контура и направления тока образуют правый винт.



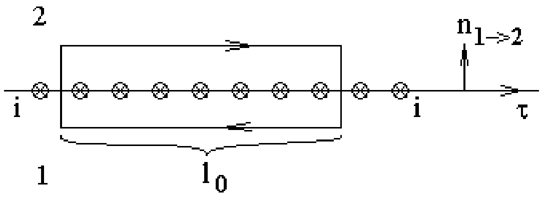
В системе СИ: $\oint_l B_l dl = \mu_0 I$.

Экзамен. Скачок магнитного поля B при переходе через токонесущую поверхность.

(граничные условия для поля $\vec{B}$ в вакууме)

Скачок испытывает тангенциальная составляющая магнитного поля.

Если подойти к поверхности с током на расстояние, которое гораздо меньше радиусов кривизны поверхности, то поверхность будет выглядеть плоской. Рассмотрим поверхностный ток, который протекает по поверхности перпендикулярной плоскости рисунка. Пусть токи текут от нас.



Рассмотрим циркуляцию магнитного поля по прямоугольному контуру, расположенному в плоскости перпендикулярной токам. Пусть вертикальные отрезки этого контура очень малы, тогда их вкладом в циркуляцию магнитного поля можно пренебречь.

Из теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

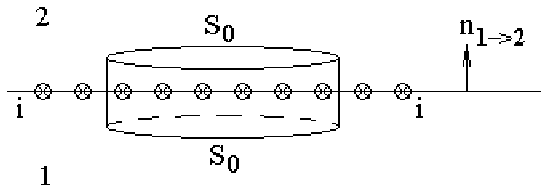
получаем $B_{2_l} l_0 + B_{1_l} l_0 = \frac{4\pi}{c} i l_0 \qquad => \qquad B_{2_l} + B_{1_l} = \frac{4\pi}{c} i$.

На верхнем отрезке направление вдоль контура $d\vec{l}$ совпадает с выбранным направлением единичного вектора $\vec{\tau} \equiv \left[\frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2} \right]$, поэтому $B_{2_l} = B_{2\tau}$. На нижнем отрезке векторы $d\vec{l}$ и $\vec{\tau}$ противоположны по направлению, поэтому $B_{1_l} = -B_{1\tau}$. Тогда

$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i$, где $\vec{\tau} \equiv \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2} \right]$ — единичный вектор, направленный по касательной к поверхности с током. Скачок $\vec{B}_\tau$ происходит вокруг вектора $\vec{i}$ по правилу правого винта.

Рассмотрим теперь, что происходит с нормальной составляющей $\vec{B}_n$ поля $\vec{B}$ на границе с поверхностным током $\vec{i}$.

Рассмотрим поток Φ_B через поверхность цилиндра настолько малой высоты, что потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь. Пусть два донышка цилиндра находятся с двух сторон поверхности с током.



$\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S} \right) = 0$ => $\oint\limits_S B_n dS = 0$ => $B_{2n} S_0 + B_{1n} S_0 = 0$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к объему цилиндра.

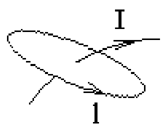
Если для обоих донышек проектировать вектор $\vec{B}$ на одно и то же направление нормали $\vec{n}_{1\to 2}$, то для нижнего донышка направление нормали изменится на противоположное, и $B_{1n} \to -B_{1n}$. Тогда

$B_{2n} S_0 - B_{1n} S_0 = 0$ =>

$B_{2n} - B_{1n} = 0$, где $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности с током.

Экзамен. Три формы теоремы о потоке и теоремы о циркуляции поля B.

$$\begin{cases} div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{B}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \oint\limits_l B_l dl = \dfrac{4\pi}{c} I \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}$$



,

где в интеграле $\oint\limits_l B_l dl$ направление обхода контура и направление тока в правой части равенства образуют правый винт; $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$ и $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2} \right]$.

Сравним с аналогичными соотношениями для поля $\vec{E}$ в вакууме:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Магнитное поле симметричных распределений тока.
Экзамен. 1. Поле соленоида бесконечной длины.

Как мы уже обсуждали ранее, составляющую магнитного поля вдоль оси соленоида можно найти по формуле $B_\perp = \frac{i}{c}\Omega$:

$B_z = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} nI$ — магнитное поле внутри соленоида, направленное вдоль его оси. Здесь $i = nI$ — плотность поверхностного тока соленоида, n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в каждом витке соленоида.

$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$

Докажем теперь строже, что:

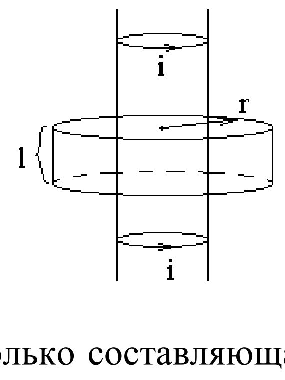
осевая составляющая поля снаружи соленоида $B_z = 0$ — отсутствует;

$B_r = 0$ — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая, направленная по радиусу в плоскости перпендикулярной оси соленоида;

$B_\varphi = 0$ — отсутствует азимутальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая направленная вокруг оси соленоида.

Докажем отсутствие радиальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра:



Поток может создать только составляющая $\vec{B}_r$. Составляющая $\vec{B}_r$ может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi rl$

Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Тогда

$B_r = 0$.