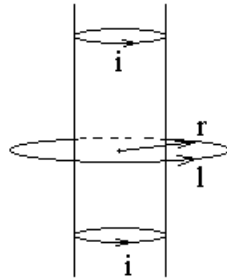


Экзамен. 1. Поле соленоида бесконечной длины (продолжение).

Докажем теперь отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим циркуляцию поля \vec{B} по окружности вокруг оси соленоида:



По теореме о циркуляции магнитного поля

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I, \text{ где } I = 0, \text{ так как нет токов пронизывающих контур}$$

интегрирования.

Составляющая B_φ — это составляющая вокруг оси соленоида, тогда $B_l = B_\varphi$. Тогда

$$\oint_l B_\varphi dl = 0 \Rightarrow B_\varphi \oint_l dl = 0 \Rightarrow B_\varphi \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B_\varphi = 0$$

Отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида доказано.

На самом деле составляющая B_φ снаружи соленоида может быть неравна нулю. Обычно ток подводится к соленоиду на одном его торце, а отводится на другом торце. Тогда, если радиус контура интегрирования больше радиуса обмотки соленоида, то контур пронизывает ток I , равный току в каждом витке соленоида, так как площадку, ограниченную контуром, протыкает провод с током I .

В этом случае

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_l \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_\varphi = B_l = \frac{2I}{cr} \quad \text{— поле}$$

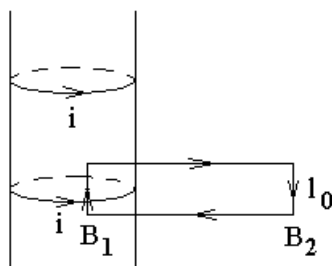
снаружи соленоида совпадает с полем прямого провода с током I .

Это поле $B_\varphi = \frac{2I}{cr}$ гораздо меньше, чем поле внутри соленоида

$B_z = \frac{4\pi}{c} nI$, так как $2\pi nr \gg 1$, где n — число витков на единице длины соленоида, nr — число витков соленоида на длине равной радиусу соленоида. Обычно полем B_φ пренебрегают, даже если оно есть.

Докажем теперь, что снаружи соленоида нет осевой составляющей магнитного поля $B_z = 0$.

Рассмотрим прямоугольный контур, в плоскости которого лежит ось цилиндра.



Горизонтальные участки прямоугольного контура дают нулевой вклад в циркуляцию, так как $B_r = 0$. Кроме того, горизонтальные участки находятся в равных условиях, поэтому они давали бы нулевой суммарный вклад в циркуляцию, даже если бы радиальная составляющая магнитного поля была бы отлична от нуля.

Тогда по теореме о циркуляции магнитного поля:

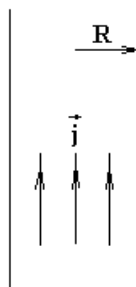
$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_{1z} l_0 + (-B_{2z}) l_0 = \frac{4\pi}{c} i l_0$$

$$B_{2z} = B_{1z} - \frac{4\pi}{c} i$$

Но внутри соленоида $B_{1z} = \frac{4\pi}{c} i$, тогда снаружи соленоида

$B_{2z} = 0$, что и требовалось доказать.

Экзамен. 2. Магнитное поле \vec{B} внутри и снаружи длинного цилиндрического проводника с заданной плотностью тока \vec{j} .



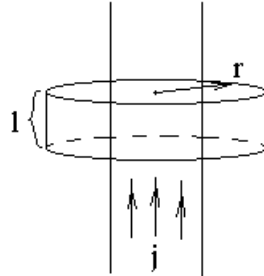
$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$$

Докажем, что $B_z = 0$ — отсутствует составляющая поля вдоль провода внутри и снаружи проводника.

По закону Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$. Заменим $I d\vec{l} \rightarrow \vec{j} dV$ и получим

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow \quad d\vec{B} \perp \vec{j} \quad \Rightarrow \quad dB_z = 0 \quad \Rightarrow \quad B_z = 0.$$

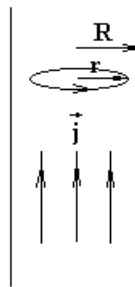
Докажем теперь, что $B_r = 0$ — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи проводника.



Рассмотрим поток вектора \vec{B} через поверхность цилиндра. Поток может создавать только составляющая B_r .

$$0 = \Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad B_r = 0$$

Рассмотрим теперь азимутальную составляющую B_φ .



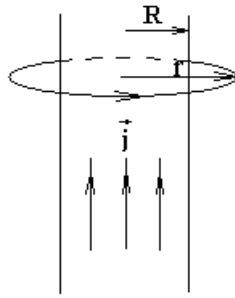
Рассмотрим циркуляцию поля \vec{B} по контуру в виде окружности в плоскости перпендикулярной оси провода с током. Пусть центр окружности находится на оси провода. Рассмотрим сначала окружность, радиус которой r меньше радиуса проводника R .

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot l = \frac{4\pi}{c} j \cdot S \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow$$

$$B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} r \quad \text{— азимутальная составляющая поля внутри проводника с}$$

плотностью тока \vec{j} при $r \leq R$.

Рассмотрим теперь окружность, радиус которой r больше радиуса проводника R .



$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot l = \frac{4\pi}{c} j \cdot S \quad \Rightarrow \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi R^2 \quad \Rightarrow$$

$B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} \cdot \frac{R^2}{r}$ — азимутальная составляющая поля снаружи проводника при $r \geq R$.

Экзамен. 3 Магнитное поле плоского слоя с током.

Пусть в объеме между двумя параллельными плоскостями текут токи с одинаковой во всех точках плотностью тока \vec{j} .

$$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_n + \vec{B}_\tau$$

Докажем, что $B_j = 0$ — отсутствует составляющая магнитного поля вдоль тока внутри и снаружи плоского слоя.

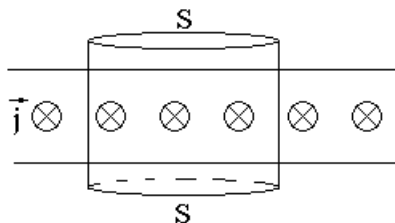
По закону Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$. Заменим $I d\vec{l} \rightarrow \vec{j} dV$ и получим

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} \cdot dV \quad \Rightarrow \quad d\vec{B} \perp \vec{j} \quad \Rightarrow \quad dB_j = 0$$

Тогда $B_j = 0$.

Докажем теперь, что отсутствует составляющая магнитного поля перпендикулярная плоскому слою $B_n = 0$.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра, доньшки которого параллельны плоскому слою и симметрично расположенного относительно слоя.



Поток может создавать только составляющая магнитного поля B_n . Эта составляющая создает поток только через доньшки цилиндра. Из симметрии задачи потоки через оба доньшка одинаковые, тогда

$$\Phi_B = \Phi_{B_n} = 2B_n S.$$

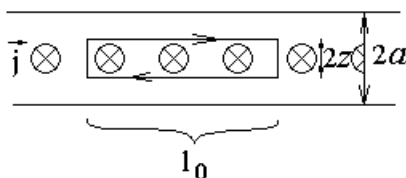
Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Следовательно,

$B_n = 0$ внутри и снаружи плоского слоя с током.

Осталось найти составляющую B_τ , направленную по касательной к плоскостям слоя и перпендикулярную токам.

Рассмотрим циркуляцию поля \vec{B} по прямоугольному контуру.

Пусть $|z| \leq a$.

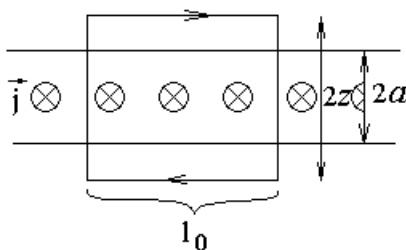


Вклад в циркуляцию дают только горизонтальные отрезки. Вклад двух горизонтальных отрезков одинаков. Тогда

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} jS \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2zl_0 \quad \Rightarrow$$

$B_\tau = \frac{4\pi}{c} jz$ — магнитное поле внутри слоя $|z| \leq a$ в направлении параллельном границам слоя и перпендикулярно току.

Пусть теперь $|z| \geq a$.



$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} jS \quad \Rightarrow \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2al_0$$

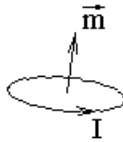
\Rightarrow

$B_\tau = \frac{4\pi}{c} ja$ — магнитное поле снаружи слоя $|z| \geq a$ в направлении параллельном границам слоя и перпендикулярно току.

Экзамен. Магнитный диполь. Момент сил, действующих на виток с током в однородном магнитном поле.

$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S}$ — определение магнитного дипольного момента тока I в

контуре, ограничивающем площадку \vec{S} . Направление дипольного момента образует правый винт с направлением тока.



Факультативная вставка.

В системе СИ: $\vec{m} = I\vec{S}$.

Магнитный дипольный момент может быть выражен иначе:

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S} = \frac{I}{2c} \oint_l [\vec{r}, d\vec{l}] = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}, \vec{j}] dV.$$

Конец факультативной вставки.

Докажем, что момент сил \vec{M} , действующих на рамку с током в магнитном поле \vec{B} равен:

$$\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}].$$

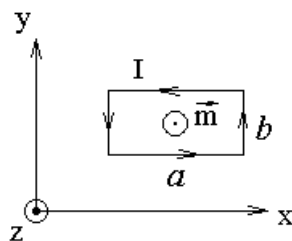
В системе СИ равенство выглядит также.

Это равенство аналогично равенству $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ в электростатике.

Докажем сначала для прямоугольной рамки с током.

Выберем направление оси z системы координат вдоль вектора \vec{m} (перпендикулярно плоскости рамки), оси x и y повернем вокруг оси z и направим вдоль сторон рамки с током.

Обозначим длину рамки вдоль оси x за a , вдоль оси y — за b .

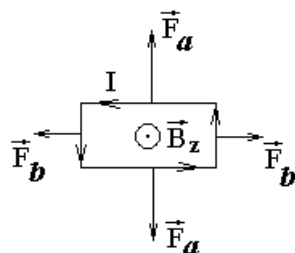


Произвольное магнитное поле \vec{B} разложим на составляющие вдоль осей координат:

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z.$$

Докажем требуемое равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ для каждой отдельной компоненты поля \vec{B} .

Рассмотрим магнитное поле с одной составляющей $\vec{B} = \vec{B}_z$.



Направление и величина сил на рисунке определяются законом Ампера

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot [d\vec{l}, \vec{B}].$$

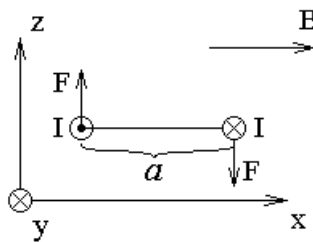
Из рисунка видно, что противоположно направленные силы попарно дают нулевой момент. Следовательно, $\vec{M} = 0$ для всех 4-х сил.

С другой стороны, $[\vec{m}, \vec{B}] = 0$, так как $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{B}$.

Следовательно, при $\vec{B} = \vec{B}_z$ условие $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ выполнено.

Рассмотрим теперь магнитное поле вдоль оси x .

$$\vec{B} = \vec{B}_x.$$



На отрезках рамки длиной a , которые направлены вдоль оси x и, соответственно, вдоль поля \vec{B} , сила Ампера равна нулю.

Сумма сил равна нулю. При этом условии момент сил не зависит от положения начала координат. Выберем начало координат в середине левого отрезка с током. Тогда плечо для силы Ампера, действующей на левый отрезок, равно нулю, и момент сил определяется только силой, действующей на правый отрезок. Момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ направлен вдоль оси y , так как вектор \vec{r} направлен слева направо.

Это с одной стороны, а с другой стороны вектор $[\vec{m}, \vec{B}] = [\vec{m}_z, \vec{B}_x]$ также направлен вдоль оси y . Следовательно, $\vec{M} \uparrow \uparrow [\vec{m}, \vec{B}]$.

Покажем, что эти векторы не только одинаково направлены, но и равны по величине.

Момент сил равен произведению силы на плечо

$$M = aF.$$

Подставим сюда выражение для силы из закона Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot [d\vec{l}, \vec{B}]$

откуда $F = \frac{I}{c} bB$. Тогда

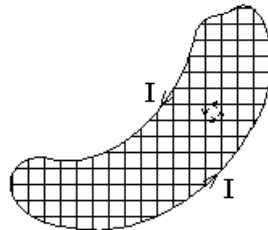
$$M = a \frac{I}{c} bB = \frac{I}{c} SB = |\vec{m}| B = [|\vec{m}, \vec{B}|].$$

Следовательно, равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ доказано при $\vec{B} = \vec{B}_x$.

Аналогично доказывается, что $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ при $\vec{B} = \vec{B}_y$.

Складывая равенства $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ для трех составляющих вектора \vec{B} , получим, что равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ выполняется для любого вектора \vec{B} и прямоугольной рамки с током.

Любой контур в плоскости можно приблизительно представить, как суперпозицию токов в малых прямоугольных рамках:



Складывая токи прямоугольных рамок, получим ток по краю контура. Для каждой i -ой прямоугольной рамки доказано, что

$$\vec{M}_i = [\vec{m}_i, \vec{B}].$$

Просуммируем это равенство по всем прямоугольным контурам, по всем i , и получим

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{m}_i, \vec{B}] = \sum_i \left[\frac{I}{c} \vec{S}_i, \vec{B} \right] = \left[\frac{I}{c} \sum_i \vec{S}_i, \vec{B} \right] = \left[\frac{I}{c} \vec{S}, \vec{B} \right] = [\vec{m}, \vec{B}].$$

Тогда

$$\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}], \text{ что и требовалось доказать.}$$

Для поверхности неплоского контура будем считать равенство $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$

определением вектора суммарной поверхности, тогда равенство $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ будет справедливо и для неплоского контура.

Экзамен. Энергия магнитного диполя в магнитном поле.

В электростатике:

$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ — момент сил, действующих на диполь в электрическом поле.

$W = -(\vec{p}, \vec{E})$ — энергия диполя в электрическом поле.

Энергия диполя в электрическом поле определяется ориентацией диполя, то есть зависит от его поворота.

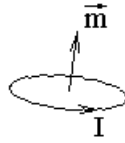
Повернуть диполь стремится момент сил.

Следовательно, в электростатике формула для энергии однозначно определяется формулой для момента сил.

То есть из $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]$ следует $W = -(\vec{p}, \vec{E})$,

тогда из $\vec{M} = [\vec{m}, \vec{B}]$ следует $W = -(\vec{m}, \vec{B})$.

Тогда $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ — энергия магнитного диполя $\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S}$



Интересно, что магнитное поле не потенциально $rot(\vec{B}) \neq 0$, а магнитные силы потенциальны $W = -(\vec{m}, \vec{B})$.

Это возможно, так как сила Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} [d\vec{l}, \vec{B}]$ не параллельна магнитному полю \vec{B} .

Экзамен. Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W = -\vec{\nabla} (-(\vec{m}, \vec{B})) = \vec{\nabla} (\vec{m}, \vec{B}) \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m}, \vec{B}) \text{ — сила, действующая на магнитный диполь } \vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S}.$$

Для сравнения в электростатике $\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla}) \vec{E}$, а при условии $rot(\vec{E}) = 0$ получаем $\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{p}, \vec{E})$.

Факультатив. Векторный потенциал поля точечного магнитного диполя.

$$d\vec{A} \equiv \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}}{r} \text{ — определение векторного потенциала для элемента тока } Id\vec{l},$$

r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения.

Тогда для замкнутого контура с током векторный потенциал:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

С учетом того, что $d\vec{l}' = d\vec{r}'$ получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \oint_{l'} \frac{I}{c} \cdot \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ — векторный потенциал замкнутого контура с током.}$$

Это точное выражение для векторного потенциала, а нас интересует приближенное выражение с учетом того, что расстояние от токов до точки наблюдения гораздо больше, чем размеры контура с током.

Выберем начало координат где-то в области магнитного диполя.

Пусть \vec{r}' — радиус-вектор элемента тока магнитного диполя,

\vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения векторного потенциала, создаваемого магнитным диполем.

Для точечного магнитного диполя $r' \ll r$.