<u>Экзамен. Вектор Пойнтинга.</u>

(вектор Умова-Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w=\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}+\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw=d\left(\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}\right)=\frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D},d\vec{E}\right)+\left(\vec{E},d\vec{D}\right)\right\}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине. И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика

$$\vec{D}=\hat{\varepsilon}\vec{E} \qquad => \qquad D_k=\sum_i \varepsilon_{ki}E_i \qquad =>$$

$$\left(\vec{D},d\vec{E}\right)=\sum_k D_k dE_k=\sum_k\left(\sum_i \varepsilon_{ki}E_i\right)dE_k=\sum_{k,i}\varepsilon_{ki}E_i dE_k$$

$$\left(\vec{E},d\vec{D}\right)=\sum_i E_i dD_i=\sum_i E_i d\left(\sum_k \varepsilon_{ik}E_k\right)=\sum_{k,i}\varepsilon_{ik}E_i dE_k$$

С учетом $\varepsilon_{ki}=\varepsilon_{ik}$ получаем $\left(\vec{D},d\vec{E}\right)=\left(\vec{E},d\vec{D}\right)$. Тогда

$$dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E},d\vec{D}\right).$$

Аналогично для энергии магнитного поля $dw=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{H},d\vec{B}\right)$.

$dw=\frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E},d\vec{D}\right)+\left(\vec{H},d\vec{B}\right)\right\}$ — изменение объемной плотности энергии электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем исходная формула $w=\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi}+\frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$. Формула $dw=\frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E},d\vec{D}\right)+\left(\vec{H},d\vec{B}\right)\right\}$ справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)+\left(\vec{H},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\right\}$, куда в правую часть производные по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = c\cdot rot\left(\vec{H}\right) - 4\pi\vec{j} \\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\cdot rot\left(\vec{E}\right) \end{cases} \quad =>$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, c\cdot rot\left(\vec{H}\right) - 4\pi\vec{j}\right) + \left(\vec{H}, -c\cdot rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E},\vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) + \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right)\right\} \quad =>$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E},\vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{-\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{H}}\right]\right) + \left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\underline{\vec{E}}\right]\right)\right\}$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования $\vec{\nabla}$.

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + \frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla},\left[\underline{\vec{E}},\vec{H}\right]\right) + \left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\underline{\vec{H}}\right]\right)\right\}.$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla},\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной $\vec{\nabla}$.

Скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$\underline{-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{j},\vec{E}\right) + div\left(\vec{S}\right)}$, где $\underline{\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E},\vec{H}\right]}$ — вектор Пойнтинга. Эти два равенства нужно помнить к экзамену.

В системе СИ: $\vec{S} \equiv \left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Равенство $-\frac{\partial w}{\partial t}=\left(\vec{j},\vec{E}\right)+div\left(\vec{S}\right)$ можно уточнить с учетом возможных сторонних сил с напряженностью $\vec{E}_{стор}$.

Рассмотрим закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил:

$$\nu=\left(\vec{j},\vec{E}+\vec{E}_{стор}\right) \quad => \quad \left(\vec{j},\vec{E}\right)=\nu-\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right) \quad =>$$

$$\left(\vec{j},\vec{E}_{стор}\right)-\frac{\partial w}{\partial t}=\nu+div\left(\vec{S}\right)$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i-\frac{\partial W}{\partial t}=N+\oint_S\left(\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right],d\vec{S}\right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуются на нагрев (Ленц-Джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь $\mathcal{E}_i$ — любые ЭДС, кроме ЭДС индукции, работа которых учитывается изменением энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

В системе СИ вектор Пойнтинга: $\vec{S}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$.

Заметим, что для одного фотона

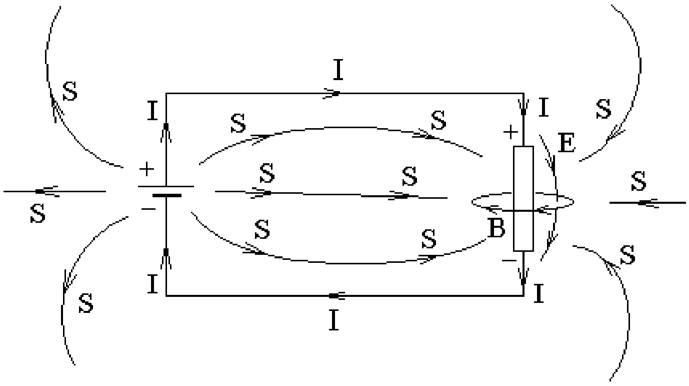
$$\left.\begin{aligned} W&=mc^2\\ p&=mc\end{aligned}\right\} \quad => \quad p=\frac{W}{c}=\frac{h\nu}{c}.$$

Из равенств $\begin{cases}\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\\ p=\frac{W}{c}\end{cases}$ следует, что

$\frac{\vec{S}}{c}=\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — плотность потока импульса.

<u>Экзамен. Примеры движения энергии электромагнитного поля.</u>

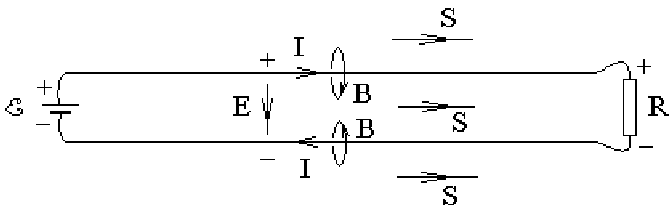
<u>1. Поле вокруг резистора с током.</u>



$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right].$$

Линии поля $\vec{S}$ втекают в резистор со всех сторон, а из батареи ЭДС — вытекают.

<u>2. Двухпроводная линия.</u>



Энергия распространяется от ЭДС к нагрузке рядом с проводами линии, а не по проводам.

Есть два способа описания одной и той же энергии:

1). Энергия зарядов, которая передается по проводам.

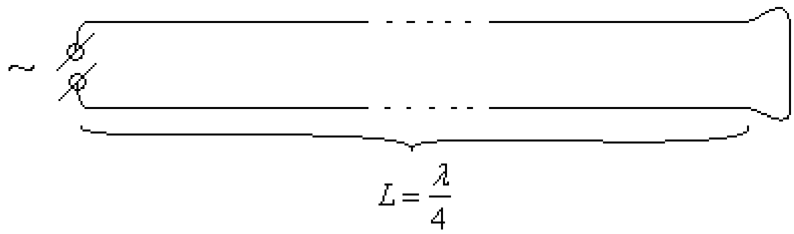
2). Энергия поля, которая проходит рядом с проводами.

Энергия зарядов — это потенциальная энергия $W = q\varphi$.

Если рассматривать переменные поля, то поле не потенциально. Поэтому у зарядов нет энергии в обычном смысле. Остается только энергия поля.

Энергию зарядов можно рассматривать до тех пор, пока $r \ll \lambda$, где r — размер электрической схемы. Так для частоты 50 Гц: $\lambda = \frac{c}{\nu}$ = (300000 км/с) / (50 1/с) = 6000 км.

Рассмотрим источник переменного напряжения, в котором потенциалы на контактах изменяются синусоидально в противофазе друг другу. Пусть, для определенности, напряжение изменяется с частотой 50 Гц. Источник напряжения присоединен к длинной двухпроводной линии, а на удаленном конце двухпроводная линия короткозамкнута.



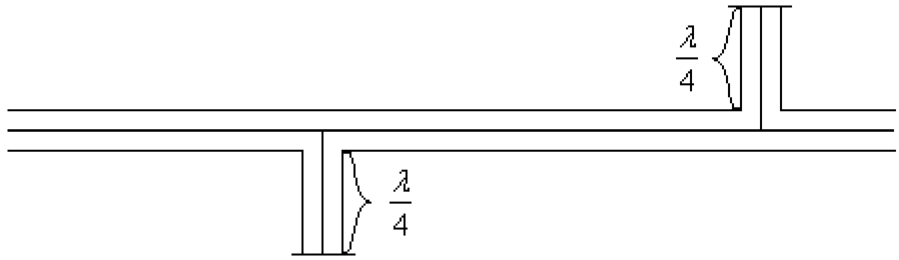
Пусть длина двухпроводной линии $L = \frac{\lambda}{4}$ = 1500 км. В таком случае оказывается, что короткое замыкание на удаленном конце линии будет восприниматься источником напряжения, как разрыв, а не как короткое замыкание.

Длина $\frac{\lambda}{4}$ эквивалентна сдвигу фаз $\frac{\pi}{2}$. Пусть в какой-то момент времени потенциал верхней клеммы источника максимален. На правом конце линии распространяющийся потенциал отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$, а доходя до нижней клеммы отстает еще на $\frac{\pi}{2}$. В сумме отставание фазы на π, что означает, что сигнал от верхней клеммы приходит к нижней клемме в противоположной фазе. То есть, когда на верхней клемме максимальный потенциал, к нижней клемме только доходит предыдущее минимальное значение потенциала. В этот же момент времени источник напряжения подает на нижнюю клемму минимальный потенциал, тот же, что и пришедший по двухпроводной линии. Следовательно, ток от источника не течет.

В этом смысле источник напряжения воспринимает короткое замыкание на удаленном конце линии, как разрыв.

В радиолокационных станциях старого типа использовалось излучение с длиной волны $\lambda = (10 \div 100)$ см. Сигнал от генератора к антенне передавался по коаксиальному кабелю, который состоит из центрального провода и цилиндрической проводящей оболочки вокруг него. Обычно оболочку называют оплеткой, что действительно справедливо только для гибкого коаксиального кабеля. К антенне от генератора подавалась большая мощность. При этом любой диэлектрик в пространстве между центральной жилой и оплеткой не выдерживает разогрева. Если же пространство между центральной жилой и оплеткой оставить пустым, то непонятно, как удержать центральную жилу по центру оплетки.

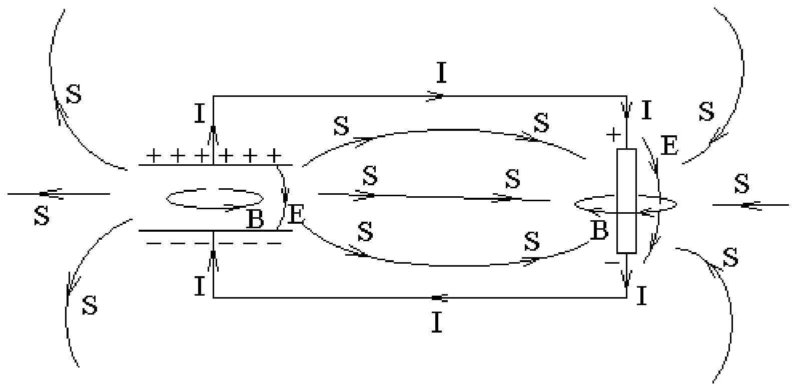
Решение было найдено в виде четвертьволнового стакана.



Конец четвертьволнового стакана является коротким замыканием, а сам стакан воспринимается сигналом центральной жилы, как разрыв, а не как короткое замыкание. По ходу распространения сигнала таких стаканов может быть несколько. В настоящее время четвертьволновым стаканом называют несколько иную конструкцию, а то, что рассмотрели мы, называется четвертьволновым штырем.

3). Разряд конденсатора через сопротивление.

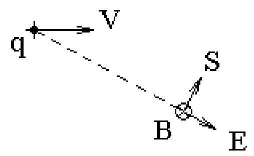
Энергия вытекает из плоского конденсатора через щели между пластинами.

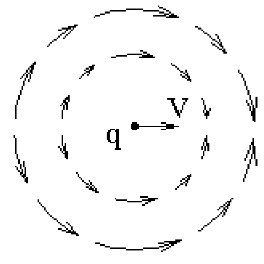


4). Равномерно и прямолинейно движущийся заряд.

В нерелятивистском случае энергия перетекает по полуокружностям, обегая вокруг заряда в направлении его движения.

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{B} = \frac{q}{c}\cdot\frac{\left[\vec{V},\vec{r}\right]}{r^3} \qquad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{B}\right]$$





Электрические цепи переменного тока.

(рассмотрение этой темы будет проведено в системе СИ)

Экзамен. Связь тока и напряжения для линейных элементов цепи переменного тока.

Для резистора:

$U = RI$

Для конденсатора:

$$\begin{cases} C \equiv \dfrac{q}{U} \\ I \equiv \dfrac{dq}{dt} \end{cases} \quad =>$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(t') \cdot dt'$$

Для катушки индуктивности с системе единиц Гаусса $\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = L\dfrac{I}{c} \end{cases}$, а в системе СИ:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = LI \end{cases} \quad => \quad \mathcal{E}_{инд} = -L\dot{I}, \quad \text{где } \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим реальную катушку индуктивности, как последовательно включенные идеальная катушка L и резистор R.

Рассмотрим закон Ома для участка цепи с учетом ЭДС:

$U + \mathcal{E} = RI$.

Пусть сопротивление участка цепи стремится к нулю $R \to 0$, тогда

$U = -\mathcal{E}$.

То есть согласно принятым правилам знаков напряжение, падающее на ЭДС, отличается знаком от величины самой ЭДС. Аналогично для катушки индуктивности:

$U_L = -\mathcal{E}_{инд}$.

Тогда связь тока и напряжения для линейных элементов цепи имеет вид:

$$\begin{cases} U_R = RI \\ U_C = \dfrac{1}{C} q = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_0^t I(t')\, dt' \\ U_L = L\dot{I} \end{cases}$$