Экзамен. Потенциал электростатического поля.

Потенциал — потенциальная энергия единичного заряда.

$$\varphi \equiv \frac{W'}{q'}$$

Экзамен. Потенциал произвольного распределения зарядов.

Для системы точечных зарядов q_i получим следующее выражение для потенциала φ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W'(\vec{r})}{q'} = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Тогда для произвольного распределения зарядов получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,dS'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int_{l'} \frac{\tau(\vec{r}\,')\cdot dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$\varphi = \dfrac{q}{r}$ — потенциал поля точечного заряда.

В системе СИ $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q}{r}$.

Экзамен. Связь потенциала и напряженности электростатического поля.

$$\varphi(\vec{r}_I) \equiv \frac{W'(\vec{r}_I)}{q'} \equiv \frac{A'_{I\to\infty}}{q'} = \frac{\int_I^\infty (\vec{F}',d\vec{l})}{q'} = \int_I^\infty \left(\frac{\vec{F}'}{q'},d\vec{l}\right) = \int_I^\infty (\vec{E},d\vec{l}) \quad =>$$

$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^\infty (\vec{E},d\vec{l}) = \int_{\vec{r}}^\infty E_l dl$ — связь потенциала и напряженности в одну сторону.

Получим теперь связь между $\vec{E}$ и φ в другую сторону.

Рассмотрим

$$\varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) = \int_{\vec{r}_{II}}^\infty E_l dl - \int_{\vec{r}_I}^\infty E_l dl = -\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl.$$

Устремим $\vec{r}_{II} \to \vec{r}_I$ и получим:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(\vec{r}_{II}) - \varphi(\vec{r}_I) \approx d\varphi \\ -\int_{\vec{r}_I}^{\vec{r}_{II}} E_l dl \approx -E_l dl \end{array}\right\} \quad => \quad d\varphi = -E_l dl \quad =>$$

$E_l = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$ — для любого направления l.

Рассмотрим направления вдоль осей x, y, z:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \qquad \Rightarrow$$

$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, где

$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \dfrac{\partial}{\partial z}$ — оператор набла.

$grad\left(\varphi\right) \equiv \vec{\nabla} \varphi$ — определения градиента.

$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \\ \varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} E_l dl \end{cases}$ — связь напряженности и потенциала в обе стороны.

Факультатив. Связь силы и потенциальной энергии для любых потенциальных полей.

$\varphi \equiv \dfrac{W'}{q'}$ и $\vec{E} \equiv \dfrac{\vec{F}'}{q'}$ и из $\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} E_l \, dl$ мы получили $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$.

Тогда, повторив выкладки, из равенства $W\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$ мы получим $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$. То есть, если $W\left(\vec{r}\right)$ — это энергия или способность совершить работу из точки $\vec{r}$, то сила может быть выражена через энергию по формуле $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$.

Можно доказать и в обратную сторону, что из равенства $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$ следует $W\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right)$. И действительно:

$$-\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{F}, d\vec{l}\right) = -\int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(-\vec{\nabla} W, d\vec{l}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \left(\vec{\nabla} W\right)_l dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \frac{\partial W}{\partial l} \cdot dl = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} dW = W\Big|_{\vec{r}}^{\infty} = -W\left(\vec{r}\right)$$

То есть, если для силы $\vec{F}$ удалось подобрать такую функцию W, что $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$, то сила — потенциальна, а W - потенциальная энергия, соответствующая этой силе.

Факультатив. Физический смысл градиента.

Покажем, что проекция градиента на любое направление равна производной по этому направлению.

Градиент произвольной функции φ равен $\vec{\nabla}\varphi \equiv \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Проекция градиента на направление оси x — это коэффициент при единичном векторе $\vec{i}$ вдоль оси x, то есть $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ось x можно направить произвольно вдоль любого направления l, следовательно, проекция градиента $\vec{\nabla}\varphi$ на произвольное направление l равна $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$.

Зададимся вопросом, в каком направлении проекция вектора максимальна? Ответ — в направлении самого вектора. Тогда вектор смотрит в направлении, проекция вектора на которое максимальна.

Следовательно, направление градиента, как вектора — это направление, в котором максимальна производная по направлению, то есть направление, в котором функция быстрее всего возрастает.

Градиент имеет направление, в котором функция быстрее всего возрастает, а длина градиента равна производной от функции по этому направлению.

Факультатив. Дивергенция.

$$div\left(\vec{A}\right)\equiv\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Факультатив. Теорема Гаусса-Остроградского.

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int\limits_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV=\oint\limits_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)$$

Здесь $\oint\limits_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)\equiv\Phi_A$ — поток произвольного векторного поля $\vec{A}$, и при вычислении потока используется внешняя нормаль к поверхности.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int\limits_a^b f'dx=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

$$\int\limits_V\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)\cdot dV=\oint\limits_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

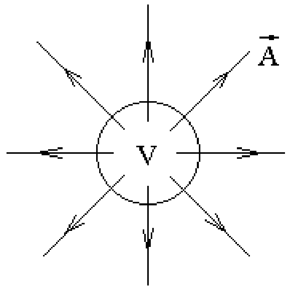
Факультатив. Физический смысл дивергенции.

Рассмотрим малый объем V:

$$\int_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV \approx div\left(\vec{A}\right)\cdot\int_V dV = V\cdot div\left(\vec{A}\right) \quad =>$$

$$div\left(\vec{A}\right)\approx\frac{\int_V div\left(\vec{A}\right)\cdot dV}{V}=\frac{\oint_S\left(\vec{A},d\vec{S}\right)}{V}=\frac{\Phi_A}{V} \quad =>$$

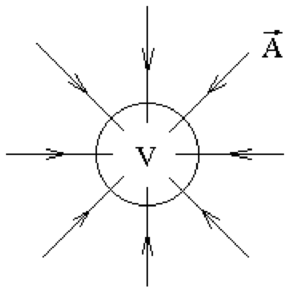
Физический смысл дивергенции: дивергенция — объемная плотность потока. Но поток — это сколько линий поля протекает. Тогда, если



,

то поток положительный $\Phi_A > 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) > 0$.

Если же



то поток отрицательный $\Phi_A < 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) < 0$.

Дивергенция — производная во все стороны.

Экзамен. Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме.

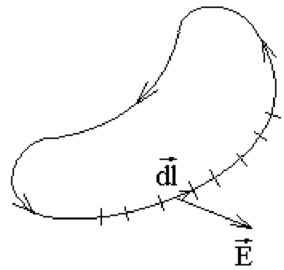
$$\Phi_E = 4\pi Q \quad \left|\cdot\frac{1}{V}\right. \quad => \quad \frac{\Phi_E}{V}=\frac{4\pi Q}{V} \quad \left| V\to 0\right. \quad =>$$

$$div\left(\vec{E}\right)=4\pi\rho$$

В системе СИ: $div\left(\vec{E}\right)=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Экзамен. Теорема о циркуляции электростатического поля E.

$\Gamma_E \equiv \oint_l\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\oint_l E_l dl$ — определение циркуляции поля $\vec{E}$.



Для вычисления циркуляции по контуру или по замкнутой линии эту замкнутую линию нужно разбить на большое число малых отрезков. Каждому отрезку соответствует вектор $d\vec{l}$. В области отрезка электрическое поле $\vec{E}$ почти постоянно. Для каждого отрезка нужно вычислить $\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ и просуммировать соответствующие величины по замкнутому контуру.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру:

$$\Gamma_E \equiv \oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \oint_l \left(\frac{\vec{F}'}{q'}, d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint_l \left(\vec{F}', d\vec{l}\right) = \frac{1}{q'}\oint_l dA' = \frac{1}{q'}A'_{I\to I}$$

Работу по перемещению заряда по замкнутому контуру $A_{I\to I}$ можно найти из выражения для работы по перемещению из точки I в точку II:

$$A'_{I\to I} = A'_{I\to II}\Big|_{II\to I} = q'\sum_i q_i\left(\frac{1}{r_{iI}} - \frac{1}{r_{iII}}\right)\Bigg|_{II\to I} = 0 \qquad =>$$

$\Gamma_E = 0$ или, что то же самое, $\oint_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0$ — теорема о циркуляции электростатического поля.

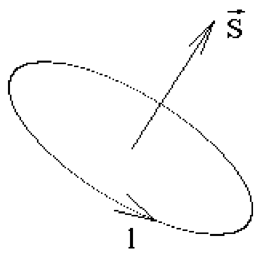
<u>Факультатив. Ротор.</u>

$$rot\left(\vec{A}\right) \equiv \left[\nabla, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

<u>Факультатив. Теорема Стокса.</u>

(математическая теорема, без доказательства)

$$\int_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S}\right) = \oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l}\right),$$



Направление нормали к поверхности и направление обхода контура образуют правый винт.

Вместо доказательства сравним два равенства:

$$\int_a^b f'dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_S \left(\left[\vec{\nabla}, \vec{A} \right], d\vec{S} \right) = \oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l} \right)$$

В обеих формулах интеграл от производной равен сумме значений функции по границе области интегрирования.

Факультатив. Физический смысл ротора.

Рассмотрим маленькую площадку S:

$$\int_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S} \right) = \int_S \left(rot\left(\vec{A}\right) \right)_n dS \approx \left(rot\left(\vec{A}\right) \right)_n \cdot \int_S dS \approx S \cdot \left(rot\left(\vec{A}\right) \right)_n \quad =>$$

$$\left(rot\left(\vec{A}\right) \right)_n \approx \frac{\int_S \left(rot\left(\vec{A}\right), d\vec{S} \right)}{S} = \frac{\oint_l \left(\vec{A}, d\vec{l} \right)}{S} = \frac{\Gamma_A}{S}$$

Ротор — поверхностная плотность циркуляции.

Циркуляция — мера закрученности поля.

Ротор производная вида: