Экзамен. Потенциал поля точечного диполя (продолжение).

Докажем, что для любой функции $f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$ от разности векторов $\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$ справедливо следующее соотношение:

$\vec{\nabla}_i f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) = -\vec{\nabla} f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$.

И действительно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) &= \frac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)} \cdot \frac{\partial\left(x-x_i\right)}{\partial x_i} = -\frac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)} \\ \frac{\partial}{\partial x} f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right) &= \frac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)} \cdot \frac{\partial\left(x-x_i\right)}{\partial x} = +\frac{\partial f\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)}{\partial\left(x-x_i\right)} \end{aligned}\right\} \quad => \quad \vec{\nabla}_i = -\vec{\nabla}$$

=>

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \approx \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \left.\left(\vec{\nabla}_i \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right) = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \left.\left(\vec{\nabla} \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}\right)\right|_{\vec{r}_i=0}\right) \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right).$$

Найдем $\vec{\nabla}\dfrac{1}{r}$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{r} \\ \vec{E} &= q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi \end{aligned}\right\} \quad => \quad q\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\frac{q}{r} \quad => \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Подставим это выражение в разложение $\dfrac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$ по степеням $\vec{r}_i$:

$$\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} + \left(\vec{r}_i, \frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\left(\vec{r}_i, \vec{r}\right)}{r^3}$$

Подставим это разложение в выражение для потенциала:

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \sum_i \frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \approx \sum_i q_i \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{\left(\vec{r}_i, \vec{r}\right)}{r^3}\right) = \frac{\sum\limits_i q_i}{r} + \frac{\left(\sum\limits_i q_i \vec{r}_i, \vec{r}\right)}{r^3} = \frac{Q}{r} + \frac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$$

Здесь введено обозначение

$\vec{p} \equiv \sum\limits_i q_i \vec{r}_i$ - дипольный момент распределения зарядов.

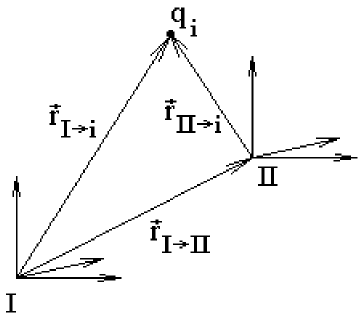
Тогда $\varphi\left(\vec{r}\right) \approx \dfrac{Q}{r} + \dfrac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$, где $\dfrac{Q}{r}$ - потенциал заряда, $\dfrac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$ - потенциал диполя.

$\varphi = \dfrac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$ — потенциал точечного диполя.

$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ — определение дипольного момента системы зарядов $\{q_i\}$.

Факультатив. Изменение дипольного момента при переходе от одной системы отсчета к другой.

Пусть $\vec{r}_{I\to II}$ — положение второй системы отсчета относительно первой, $\vec{r}_{I\to i}$ — радиус-вектор заряда q_i в первой системе отсчета, $\vec{r}_{II\to i}$ — радиус-вектор заряда q_i во второй системе отсчета.



Из рисунка видно, что $\vec{r}_{II\to i} = \vec{r}_{I\to i} - \vec{r}_{I\to II}$. Обозначим дипольный момент относительно первой системы отсчета за $\vec{p}_I$, а относительно второй системы — $\vec{p}_{II}$. Тогда

$$\vec{p}_{II} = \sum_i q_i \vec{r}_{II\to i} = \sum_i q_i \cdot \left(\vec{r}_{I\to i} - \vec{r}_{I\to II}\right) = \sum_i q_i \vec{r}_{I\to i} - \left(\sum_i q_i\right) \cdot \vec{r}_{I\to II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I\to II}$$

$$\vec{p}_{II} = \vec{p}_I - Q \cdot \vec{r}_{I\to II}$$

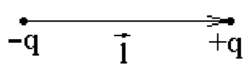
Здесь $\vec{p}_{II}$ — дипольный момент во второй системе отсчета, $\vec{p}_I$ — дипольный момент в первой системе отсчета, Q — полный заряд системы, $\vec{r}_{I\to II}$ — положение второй системы отсчета относительно первой.

Экзамен. $\vec{p}_{II} = \vec{p}_I$ при $Q = 0$.

Дипольный момент не зависит от системы координат, если полный заряд системы равен нулю. Обычно дипольный момент системы зарядов рассматривают только в том случае, если полный заряд системы равен нулю. Следовательно, обычно величина дипольного момента не зависит от положения начала координат.

Экзамен. Простейший электрический диполь.

Простейший электрический диполь — это пара точечных зарядов противоположных знаков и одинаковых по модулю.



$$\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i = q\vec{l} \qquad =>$$

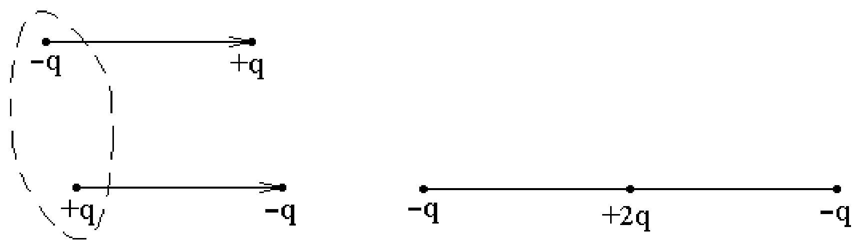
$$\vec{p} = q\vec{l}$$

Здесь $\vec{p}$ — дипольный момент пары зарядов $-q$ и $+q$, $\vec{l}$ — вектор направленный из заряда $-q$ к заряду $+q$.

Факультатив. Простейший квадруполь, октуполь, гексадекаполь и т.д.

Если точечный заряд продублировать, поменять знак и сдвинуть, то полученная пара зарядов образует простейший диполь.

Если заряды простейшего диполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший квадруполь.



На рисунке приведены два варианта квадруполей.

Если заряды простейшего мультиполя продублировать, поменять их знаки и сдвинуть на один и тот же вектор, то образуется простейший мультиполь следующего порядка.

Экзамен. Напряженность поля точечного диполя.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$$

Раскроем последнее выражение, как производную от произведения $(\vec{p},\vec{r})$ на $\frac{1}{r^3}$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\cdot\vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) - (\vec{p},\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$$

Вычислим отдельно каждую из производных в последнем выражении.

Сначала вычислим $\vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r})$.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p},\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p_x x + p_y y + p_z z\right) = p_x \qquad => \qquad \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p}$$

Вычислим теперь $\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = \vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^3\right) = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}$$

Найдем $\vec{\nabla}\frac{1}{r}$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \frac{q}{r} \\ &\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \\ &\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \end{aligned}\right\} \quad => \quad q\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}\frac{q}{r} \quad => \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Тогда

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r} = 3\left(\frac{1}{r}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -3\frac{\vec{r}}{r^5}.$$

Подставим $\begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) = \vec{p} \\ \vec{\nabla}\frac{1}{r^3} = -3\frac{\vec{r}}{r^5} \end{cases}$ в $\vec{E} = -\frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla}(\vec{p},\vec{r}) - (\vec{p},\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}$ и получим:

$\vec{E} = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$, где $\vec{r}$ — вектор, направленный из диполя $\vec{p}$ в точку наблюдения.

Факультатив. Напряженность поля точечного диполя с учетом поля внутри самого диполя.

Без доказательства:

$$\vec{E} = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{4}{3}\pi\vec{p} \cdot \delta(\vec{r}).$$

Здесь $\delta(\vec{r})$ — дельта-функция Дирака. Для дельта-функции по определению:

при $\vec{r} \neq 0$: $\delta(\vec{r}) = 0$,

при $\vec{r} = 0$: $\delta(\vec{r}) = \infty$,

$$\int\limits_{V=\infty} \delta(\vec{r}) \cdot dV = 1.$$

$\delta(\vec{r})$ — очень узкая и очень высокая функция.

Для точечного заряда q_0, расположенного в точке $\vec{r}_0$, объемная плотность заряда:

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Экзамен. Момент сил, действующих на точечный диполь в электрическом поле.

Рассмотрим систему зарядов $\{q_i\}$, близко расположенных друг к другу. Суммарный момент внутренних сил равен нулю в соответствии с третьим законом Ньютона. Тогда момент сил, действующих на систему зарядов, можно найти, как сумму моментов внешних сил, действующих на каждый из зарядов:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] = \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i\vec{E}_i\right].$$

Если расстояния между зарядами малы, то напряженности внешнего электрического поля в точках расположения разных зарядов примерно равны $\vec{E}_i \approx \vec{E}$. =>

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i\vec{E}_i\right] \approx \sum_i \left[\vec{r}_i, q_i\vec{E}\right] = \sum_i \left[q_i\vec{r}_i, \vec{E}\right] = \left[\sum_i q_i\vec{r}_i, \vec{E}\right] = \left[\vec{p}, \vec{E}\right] \quad =>$$

$\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E}\right]$, где $\vec{M}$ — момент сил, $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{E}$ — внешнее по отношению к диполю электрическое поле.

Экзамен. Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле.

Сумма внутренних сил между зарядами диполя равна нулю по третьему закону Ньютона. Тогда силу, действующую на диполь, можно найти, как сумму внешних сил, действующих на отдельные заряды диполя:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q_i\vec{E}_i .$$

Если, как и в предыдущем вопросе считать, что $\vec{E}_i \approx \vec{E}$, то для диполя с нулевым суммарным зарядом суммарная сила будет равна нулю. В таком случае для определения величины силы потребуется учесть небольшое различие величин $\vec{E}_i = \vec{E}\left(\vec{r}_i\right)$ в точках $\vec{r}_i$ расположения разных зарядов q_i рассматриваемого диполя. Чтобы учесть это различие, разложим напряженность электрического поля $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$ в ряд Тейлора по степеням $\vec{r}$ в малой окрестности рассматриваемого диполя.

Поместим начало координат вблизи зарядов диполя. Рассмотрим разложение x-проекции поля $\vec{E}$ в ряд Тейлора в точке расположения заряда q_i. Это разложение по степеням радиус-вектора $\vec{r}_i$. По аналогии с одномерным рядом Тейлора:

$$\left\{\begin{aligned} & f\left(x\right) \approx f\left(0\right) + x \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} \\ & x \to \vec{r}_i \\ & f\left(x\right) \to E_{ix} = E_x\left(\vec{r}_i\right) \end{aligned}\right\} \quad =>$$

$$E_{ix} = E_x\left(\vec{r}_i\right) \approx E_x\left(0\right) + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}E_x\Big|_{\vec{r}_i=0}\right) = E_x + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}E_x\right) = E_x + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)E_x$$

=>

$$\vec{E}_i \approx \vec{E} + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} \quad =>$$

$$\vec{F} = \sum_i q_i\vec{E}_i \approx \sum_i q_i\left\{\vec{E} + \left(\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E}\right\} = \vec{E} \cdot \sum_i q_i + \left(\sum_i q_i\vec{r}_i, \vec{\nabla}\right)\vec{E} = Q\vec{E} + \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

В последнем выражении первое слагаемое — сила, действующая на полный заряд системы зарядов, а второе слагаемое — сила, действующая на диполь.

$\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ — сила, действующая на точечный диполь, где $\vec{F}$ — сила, $\vec{p}$ — дипольный момент, $\vec{E}$ — электрическое поле.

<u>Экзамен. Энергия диполя в электрическом поле.</u>

Рассмотрим правило "бац минус цап"

$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ для векторов $\vec{p}$, $\vec{\nabla}$, $\vec{E}$ и получим

$\left[\vec{p}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)$.

В левой части равенства $\left[\vec{p}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = \left[\vec{p}, rot\left(\vec{E}\right)\right]$, но по теореме о циркуляции электростатического поля в дифференциальной форме $rot\left(\vec{E}\right) = 0$. Тогда $\left[\vec{p}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right] = 0$ => $\vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right) = 0$ =>

$\vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) = \vec{E}\left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right) = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$

Тогда из $\vec{F} = \left(\vec{p}, \vec{\nabla}\right)\vec{E}$ следует $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$.

Для любой природы сил, если $\vec{F} = -\vec{\nabla}W$, то W — потенциальная энергия. Тогда из $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}, \vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\left(-\left(\vec{p}, \vec{E}\right)\right)$ следует, что

$W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — энергия точечного диполя в электрическом поле.

<u>Факультатив. Энергия наведенного диполя.</u>

Формула $W = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ безусловно справедлива для жесткого диполя, который может поворачиваться в поле $\vec{E}$, но в котором заряды не могут изменять взаимного расположения. Некоторые молекулы не имеют дипольного момента, пока нет внешнего поля $\vec{E}$. При включении поля $\vec{E}$ положительные заряды молекулы смещаются по полю, а отрицательные — против поля. В результате молекула приобретает так называемый наведенный дипольный момент пропорциональный полю: $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, где α — поляризуемость молекулы.

Наведенный диполь имеет две разных энергии:

$W_1 = -\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — чисто электрическая энергия, которая зависит только от расположения зарядов диполя и не зависит от природы диполя жесткого или наведенного.

Вторая энергия $W_2 = +\frac{1}{2}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$ — энергия упругих сил внутри молекулы, которые пытаются вернуть заряды на исходное место.

С учетом этих двух энергий энергия наведенного диполя:

$$W = -\frac{1}{2}\left(\vec{p}, \vec{E}\right)$$

Обычно под энергией наведенного диполя подразумевают именно эту величину, полученную с учетом энергии упругих сил, пытающихся вернуть заряды диполя на свои места, занимаемые без внешнего поля.

Электростатика диэлектриков.

Диэлектрик — материал, в котором не течет ток под действием постоянного электрического поля.

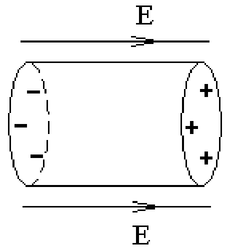
Экзамен. Поляризация диэлектрика и связанные заряды.

В электрическом поле некоторые молекулы ведут себя, как жесткие диполи, например HF, другие — как наведенные диполи, например N_2.

Жесткие диполи поворачиваются вдоль поля, а наведенные — наводятся вдоль поля.

В любом случае под действием электрического поля положительные заряды смещаются по полю $\vec{E}$, а отрицательные — против поля.

Если электрическое поле одинаковое в разных точках диэлектрика, то при смещении зарядов в объеме диэлектрика заряды не появляются. Не скомпенсированные заряды появляются на торцах диэлектрика.



Эти заряды называются связанными зарядами.

Будем называть заряды связанными, если это макроскопические заряды, которые образуются только в результате смещения зарядов внутри каждой молекулы. Любые другие заряды будем называть свободными.

Все заряды либо связанные, либо свободные.

Введем обозначения:

ρ — плотность свободных зарядов,

ρ' — плотность связанных зарядов,

$\rho + \rho'$ — плотность всех зарядов.
