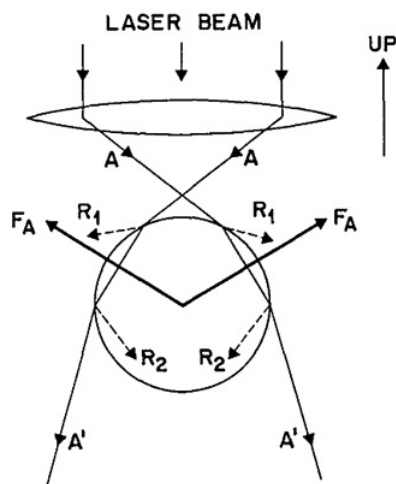
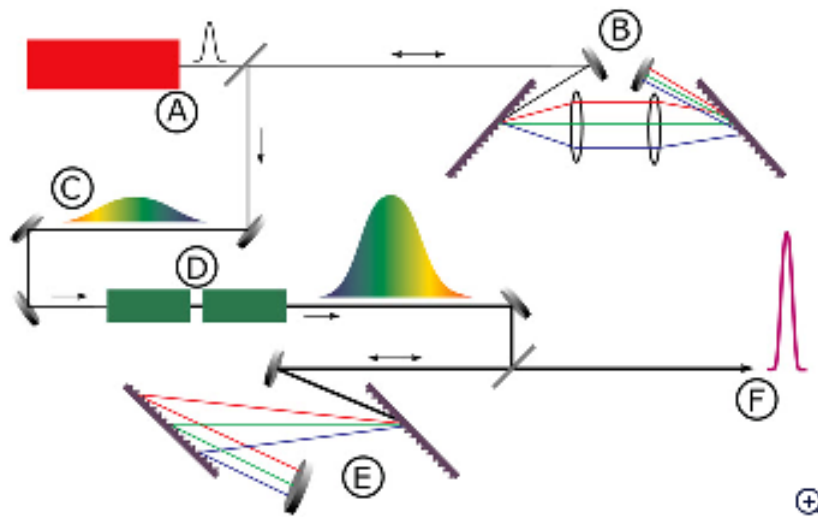


**Факультатив. Нобелевская премия по физике 2018 года.**

Оптический пинцет.



Чипирование, усиление и обратное чипирование короткого лазерного импульса.



**Экзамен. Поляризация неполярных диэлектриков.**

Неполярные диэлектрики состоят из молекул, которые не имеют жесткого дипольного момента.

Дипольный момент молекулы возникает только под действием электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}, \text{ где } \alpha \text{ — поляризуемость молекулы.}$$

На первом самом низком уровне строгости получим.

$$\vec{P} = n \cdot \langle \vec{p} \rangle = n\alpha \cdot \langle \vec{E} \rangle = n\alpha \vec{E}$$

Сравним это с  $\vec{P} = \chi \vec{E}$  и получим, что  $\chi = n\alpha$ .

Подставим сюда выражение диэлектрической восприимчивости  $\chi$  через диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ :

$$\chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \text{ и получим:}$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = n\alpha \quad \Rightarrow$$

$\varepsilon - 1 = 4\pi n\alpha$ , здесь  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $n$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость каждой молекулы.

Концентрация молекул  $n$  пропорциональна плотности среды  $\tau$ . Тогда изменение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  с изменением плотности среды происходит так, что отношение  $\frac{\varepsilon - 1}{\tau}$  остается постоянным:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const.}$$

-----

Как показывает опыт, зависимость  $\varepsilon - 1$  от  $\tau$  линейная только для газов с низкой плотностью. При увеличении плотности газа и тем более при переходе к жидкой или твердой фазе диэлектриков отклонение от линейности становится очень заметным.

В более точном приближении нужно учесть отличие действующего на молекулу поля  $\vec{E}'$  от среднего поля в диэлектрике  $\vec{E}$ .

Представьте себе, что молекулы диэлектрика расположены вплотную друг к другу. В таком случае, чтобы найти действующее на молекулу поле  $\vec{E}'$ , нужно из среднего поля в диэлектрике  $\vec{E}$  вычесть поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя. Дело в том, что поле, которое поляризованная молекула создает внутри себя, не действует на молекулу, так как на нее действует только внешнее по отношению к молекуле поле.

Вернемся теперь к рассмотрению произвольной концентрации молекул в диэлектрике. Чтобы найти действующее на молекулу поле  $\vec{E}'$ , в диэлектрике мысленно выделим шар, в центре которого находится рассматриваемая молекула. Затем мысленно удалим этот шар из диэлектрика. Затем найдем поле внутри образовавшейся шаровой полости. Затем докажем, что поле внутри каждой точки полости будет равно  $\vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$ , где  $\vec{E}$  — поле в диэлектрике до удаления шара,  $\vec{P}$  — поляризация диэлектрика. Затем можно показать, что если вернуть в полость все молекулы кроме центральной молекулы, то поле в центре полости не изменится (эту часть доказательства мы опустим). В результате поле, действующее на молекулу, равно

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Далее мы реализуем предложенный выше план. Для этого сначала найдем поле  $\vec{E}_P$  однородно поляризованного шара.

Однородно поляризованный шар можно представить себе, как два шара с плотностями зарядов  $+\rho$  и  $-\rho$ , таких что шар с плотностью заряда  $+\rho$  сдвинут на малый отрезок  $\vec{l}$  относительно шара с плотностью заряда  $-\rho$ . Дело в том, что, в процессе поляризации через любую единичную площадку

перпендикулярную направлению поляризации проходят связанные заряды  $\sigma'$ . Следовательно, справедливо и обратное. Если связанные заряды перемещаются, то возникает поляризация среды.

Дипольный момент этих двух шаров равен

$$\vec{p} = q\vec{l} = \rho V \cdot \vec{l}.$$

Если разделить его на объем шара  $V$ , то получится поляризация диэлектрика

$$\vec{P} = \rho\vec{l}.$$

Поле в любой точке внутри поляризованного шара можно найти, как сумму полей двух заряженных шаров. Пусть  $\vec{r}_-$  — вектор из центра шара с плотностью заряда  $-\rho$  в точку наблюдения внутри поляризованного шара, а  $\vec{r}_+$  — вектор из центра шара с плотностью заряда  $+\rho$  в ту же точку наблюдения.

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{l} + \vec{r}_+ = \vec{r}_- & \Rightarrow \vec{r}_+ - \vec{r}_- = -\vec{l} \Rightarrow \\ \vec{E}_P = \vec{E}_{+\rho} + \vec{E}_{-\rho} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}_+ + \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec{r}_- = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{l} = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}, \end{aligned}$$

где  $\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$  поле внутри шара с плотностью заряда  $\rho$ .

Тогда величина электрического поля в любой точке поляризованного шара:

$$\vec{E}_P = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Следовательно, если мы удалим шар из поляризованного диэлектрика, то поле в образовавшейся полости будет равно  $\vec{E} - \vec{E}_P = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}$ , где  $\vec{E}$  — поле в диэлектрике до удаления шара,  $\vec{P}$  — поляризация диэлектрика. И действительно, вместе с шаром там должно быть поле  $\vec{E}$ , значит, без шара поле будет  $\vec{E} - \vec{E}_P$ .

Заметим, что поле в шаровой полости не зависит от радиуса удаляемого шара. На каждую молекулу диэлектрика в среднем приходится объем равный  $1/n$ , где  $n$  — концентрация молекул. Удалим из диэлектрика шар вокруг интересующей нас молекулы именно с таким объемом. Это — то же самое, что удалить из диэлектрика одну интересующую нас молекулу. Поле в образовавшейся шаровой полости и будет полем, действующем на молекулу:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}.$$

Более строго эту часть доказательства, связанную с тем, что поле в шаровой полости равно действующему на молекулу полю, можно найти в учебниках по электричеству, например:

1. И. Е. Тамм. Основы теории электричества.
2. Д. В. Сивухин. Курс общей физики. Том 3. Электричество.

Дипольный момент молекулы  $\vec{p}$  наводится пропорционально именно действующему на молекулу полю  $\vec{E}'$ :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}' = \alpha \cdot \left( \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P} \right).$$

Умножим это равенство на концентрацию молекул и получим в левой части равенства поляризацию среды  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} = n\alpha \cdot \left( \vec{E} + \frac{4}{3} \pi \vec{P} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \frac{n\alpha \vec{E}}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha} = \chi \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi n\alpha}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha} = \frac{1 + \frac{8}{3} \pi n\alpha}{1 - \frac{4}{3} \pi n\alpha}$$

Обозначим  $\beta \equiv \frac{4}{3} \pi n\alpha$ , тогда

$$\varepsilon = \frac{1 + 2\beta}{1 - \beta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon - \beta\varepsilon = 1 + 2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad \Rightarrow$$

$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4}{3} \pi n\alpha$  — формула Клаузиуса — Моссогги, в системе СИ:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3}.$$

Здесь  $n$  — концентрация молекул,  $\alpha$  — поляризуемость одной молекулы.

Концентрация молекул пропорциональна плотности среды  $n \sim \tau$ , тогда

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = const$$

при изменении плотности диэлектрика величина  $\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$  остается постоянной.

Для переменных полей аналогичная формула называется формулой Лоренц — Лорентца (или формулой Лоренца — Лоренца).

### Экзамен. Поляризация полярных газообразных диэлектриков.

Молекулы полярных диэлектриков являются жесткими диполями, такими как, например, молекула HCl.

Для этих молекул во внешнем электрическом поле появляется и наведенный диполь, но его величина гораздо меньше величины жесткого диполя, поэтому наведенными диполями мы будем пренебрегать.

Жесткие диполи молекул стремятся к минимуму потенциальной энергии, то есть стремятся повернуться по полю  $\vec{E}$ , так как энергия диполя  $W = -(\vec{p}, \vec{E})$ .

Это с одной стороны, а с другой стороны, тепловые столкновения молекул стремятся разбросать диполи по направлениям случайным образом.

В результате совместного влияния этих двух факторов и происходит поляризация полярных газообразных диэлектриков во внешнем электрическом поле.

Пусть  $p_0$  — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Пусть  $d\xi$  — вероятность того, что диполь направлен в телесный угол  $d\Omega$ .

Согласно распределению Больцмана эта вероятность пропорциональна экспоненте  $e^{-\frac{W}{kT}}$ . Кроме того она пропорциональна величине телесного угла  $d\Omega$ . Тогда

$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega$ , где малый телесный угол можно выразить через углы сферической системы координат  $d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$ . Тогда

$$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

С учетом того, что  $W \ll kT$  вместо экспоненты оставим отрезок ряда Тейлора:

$$d\xi \sim \left(1 - \frac{W}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Пусть ось  $z$  направлена вдоль внешнего электрического поля  $\vec{E}$ . Задача обладает симметрией относительно поворотов вокруг оси  $z$ , поэтому от угла  $\varphi$  ничего не зависит, и суммирование по углу  $\varphi$  дает множитель  $2\pi$ , который можно включить в некоторую константу  $A$ :

$$d\xi = A \cdot \left(1 - \frac{W}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \text{ — вероятность того, что направление диполя}$$

составляет с направлением внешнего электрического поля угол, который лежит в пределах от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ .

Константу  $A$  можно найти из так называемого условия нормировки  $\int d\xi = 1$ , которое означает, что сумма всех вероятностей равна единице.

$$1 = \int d\xi = \int_0^\pi A \cdot \left(1 - \frac{W}{kT}\right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta.$$

Подставим сюда  $W = -(\vec{p}, \vec{E}) = -p_0 E \cdot \cos(\theta)$  и получим

$$1 = \int_0^{\pi} A \cdot \left( 1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = A \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta) \cdot d\theta + A \cdot \frac{p_0 E}{kT} \cdot \int_0^{\pi} \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$$

Второй интеграл равен нулю, а первый равен двум. Тогда  $1 = 2A \Rightarrow$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$d\xi = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta, \text{ где } d\xi \text{ — вероятность того, что}$$

направление диполя составляет угол с направлением напряженности поля от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$ ,  $p_0$  — величина жесткого дипольного момента молекулы.

Найдем поляризацию среды:

$$\begin{aligned} P &= P_E = n \cdot \langle p_E \rangle = n \cdot \int p_E d\xi = n \cdot \int p_0 \cos(\theta) \cdot d\xi = \\ &= n \cdot \int_0^{\pi} p_0 \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{p_0 E \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = \\ &= \frac{np_0}{2} \cdot \int_0^{\pi} \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta + \frac{np_0^2 E}{2kT} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл равен нулю, а второй интеграл равен  $\frac{2}{3}$ . Тогда

$$P = \frac{np_0^2 E}{3kT} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = \frac{np_0^2}{3kT} \vec{E} \text{ — поляризация полярных газообразных диэлектриков.}$$

$$\chi = \frac{np_0^2}{3kT} \text{ — диэлектрическая восприимчивость среды.}$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT} \text{ — диэлектрическая проницаемость среды, в}$$

$$\text{системе СИ: } \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{np_0^2}{3\varepsilon_0 kT}.$$

Заметим, что в отличие от поляризации неполярных диэлектриков поляризация полярных диэлектриков зависит от температуры:  $\chi(T)$  и  $\varepsilon(T)$ .