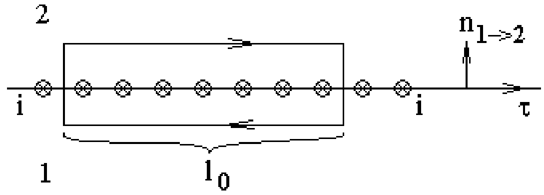
<u>Экзамен. Скачок магнитного поля В при переходе через токонесущую поверхность.</u>

(граничные условия для поля $\vec{B}$ в вакууме)

Скачок испытывает тангенциальная составляющая магнитного поля.

Если подойти к поверхности с током на расстояние, которое гораздо меньше радиусов кривизны поверхности, то поверхность будет выглядеть плоской. Рассмотрим поверхностный ток, который протекает по поверхности перпендикулярной плоскости рисунка. Пусть токи текут от нас.



Рассмотрим циркуляцию магнитного поля по прямоугольному контуру, расположенному в плоскости перпендикулярной токам. Пусть вертикальные отрезки этого контура очень малы, тогда их вкладом в циркуляцию магнитного поля можно пренебречь.

Из теоремы о циркуляции магнитного поля

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I$$

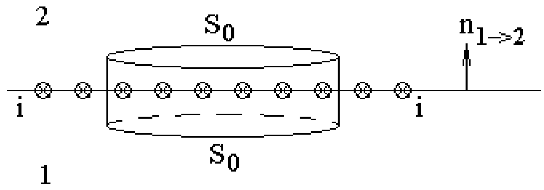
получаем $\quad B_{2_l} l_0 + B_{1_l} l_0 = \frac{4\pi}{c} i l_0 \quad => \quad B_{2_l} + B_{1_l} = \frac{4\pi}{c} i$.

На верхнем отрезке направление вдоль контура $d\vec{l}$ совпадает с выбранным направлением единичного вектора $\vec{\tau} \equiv \left[\frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$, поэтому $B_{2_l} = B_{2\tau}$. На нижнем отрезке векторы $d\vec{l}$ и $\vec{\tau}$ противоположны по направлению, поэтому $B_{1_l} = -B_{1\tau}$. Тогда

$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i$, где $\vec{\tau} \equiv \left[\frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$ — единичный вектор, направленный по касательной к поверхности с током. Скачок $\vec{B}_\tau$ происходит вокруг вектора $\vec{i}$ по правилу правого винта.

Рассмотрим теперь, что происходит с нормальной составляющей $\vec{B}_n$ поля $\vec{B}$ на границе с поверхностным током $\vec{i}$.

Рассмотрим поток Φ_B через поверхность цилиндра настолько малой высоты, что потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь. Пусть два донышка цилиндра находятся с двух сторон поверхности с током.



$$\oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \quad => \quad \oint\limits_S B_n dS = 0 \quad => \quad B_{2n}S_0 + B_{1n}S_0 = 0$$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к объему цилиндра.

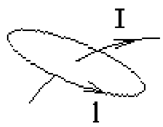
Если для обоих донышек проектировать вектор $\vec{B}$ на одно и то же направление нормали $\vec{n}_{1\to 2}$, то для нижнего донышка направление нормали изменится на противоположное, и $B_{1n} \to -B_{1n}$. Тогда

$B_{2n}S_0 - B_{1n}S_0 = 0 \quad =>$

$B_{2n} - B_{1n} = 0$, где $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности с током.

Экзамен. Три формы теоремы о потоке и теоремы о циркуляции поля B.

$$\begin{cases} div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{B}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \oint\limits_l B_l dl = \dfrac{4\pi}{c} I \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i \end{cases}$$



,

где в интеграле $\oint\limits_l B_l dl$ направление обхода контура и направление тока в правой части равенства образуют правый винт; $\vec{n} = \vec{n}_{1\to 2}$ и $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2}\right]$.

Сравним с аналогичными соотношениями для поля $\vec{E}$ в вакууме:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ \oint\limits_S \left(\vec{E}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = 0 \\ \oint\limits_l E_l dl = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$$

Магнитное поле симметричных распределений тока.

Экзамен. 1. Поле соленоида бесконечной длины.

Как мы уже обсуждали ранее, составляющую магнитного поля вдоль оси соленоида можно найти по формуле $B_\perp = \dfrac{i}{c}\Omega$:

$B_z = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} nI$ — магнитное поле внутри соленоида, направленное вдоль его оси. Здесь $i = nI$ — плотность поверхностного тока соленоида, n — число витков на единицу длины соленоида, I — сила тока в каждом витке соленоида.

$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$

Докажем теперь строже, что:

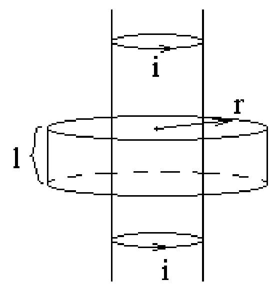
осевая составляющая поля снаружи соленоида $B_z = 0$ — отсутствует;

$B_r = 0$ — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая, направленная по радиусу в плоскости перпендикулярной оси соленоида;

$B_\varphi = 0$ — отсутствует азимутальная составляющая поля внутри и снаружи соленоида или составляющая направленная вокруг оси соленоида.

Докажем отсутствие радиальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра:



Поток может создать только составляющая $\vec{B}_r$. Составляющая $\vec{B}_r$ может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

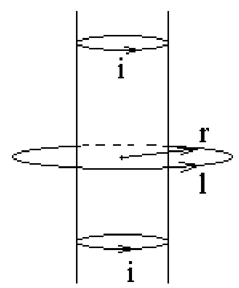
$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l$

Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Тогда

$B_r = 0$.

Докажем теперь отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{B}$ по окружности вокруг оси соленоида:



По теореме о циркуляции магнитного поля

$\oint\limits_l B_l dl = \dfrac{4\pi}{c} I$, где $I = 0$, так как нет токов пронизывающих контур интегрирования.

Составляющая B_φ — это составляющая вокруг оси соленоида, тогда $B_l = B_\varphi$. Тогда

$$\oint\limits_l B_\varphi dl = 0 \quad => \quad B_\varphi \oint\limits_l dl = 0 \quad => \quad B_\varphi \cdot 2\pi r = 0 \quad => \quad B_\varphi = 0$$

Отсутствие азимутальной составляющей магнитного поля соленоида доказано.

На самом деле составляющая B_φ снаружи соленоида может быть неравна нулю. Обычно ток подводится к соленоиду на одном его торце, а отводится на другом торце. Тогда, если радиус контура интегрирования больше радиуса обмотки соленоида, то контур пронизывает ток I, равный току в каждом витке соленоида, так как площадку, ограниченную контуром, протыкает провод с током I.

В этом случае

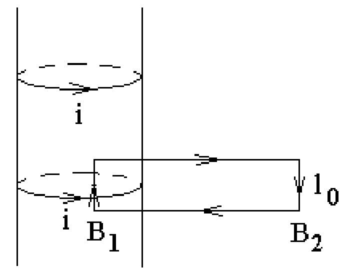
$$\oint\limits_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad => \quad B_l \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \quad => \quad B_\varphi = B_l = \frac{2I}{cr}$$

— поле снаружи соленоида совпадает с полем прямого провода с током I.

Это поле $B_\varphi = \dfrac{2I}{cr}$ гораздо меньше, чем поле внутри соленоида $B_z = \dfrac{4\pi}{c} nI$, так как $2\pi nr >> 1$, где n — число витков на единице длины соленоида, nr — число витков соленоида на длине равной радиусу соленоида. Обычно полем B_φ пренебрегают, даже если оно есть.

Докажем теперь, что снаружи соленоида нет осевой составляющей магнитного поля $B_z = 0$.

Рассмотрим прямоугольный контур, в плоскости которого лежит ось цилиндра.



Горизонтальные участки прямоугольного контура дают нулевой вклад в циркуляцию, так как $B_r = 0$. Кроме того, горизонтальные участки находятся в равных условиях, поэтому они давали бы нулевой суммарный вклад в циркуляцию, даже если бы радиальная составляющая магнитного поля была бы отлична от нуля.

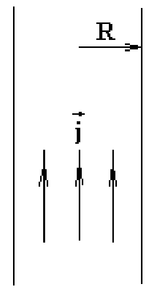
Тогда по теореме о циркуляции магнитного поля:

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \qquad \Rightarrow \qquad B_{1z} l_0 + \left(-B_{2z}\right) l_0 = \frac{4\pi}{c} i l_0$$

$$B_{2z} = B_{1z} - \frac{4\pi}{c} i$$

Но внутри соленоида $B_{1z} = \frac{4\pi}{c} i$, тогда снаружи соленоида $B_{2z} = 0$, что и требовалось доказать.

Экзамен. 2. Магнитное поле B внутри и снаружи длинного цилиндрического проводника с заданной плотностью тока j.



$$\vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}_r + \vec{B}_\varphi$$

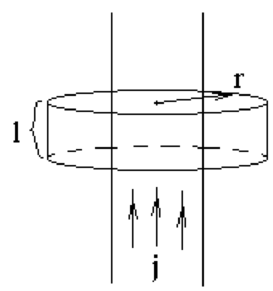
Докажем, что $B_z = 0$ — отсутствует составляющая поля вдоль провода внутри и снаружи проводника.

По закону Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}$. Заменим $Id\vec{l} \to \vec{j}dV$ и получим

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3} \cdot dV \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{B} \perp \vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad dB_z = 0 \qquad \Rightarrow$$

$B_z = 0$.

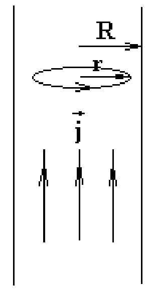
Докажем теперь, что $B_r = 0$ — отсутствует радиальная составляющая поля внутри и снаружи проводника.



Рассмотрим поток вектора $\vec{B}$ через поверхность цилиндра. Поток может создавать только составляющая B_r.

$$0 = \Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r \cdot 2\pi r l \qquad => \qquad B_r = 0$$

Рассмотрим теперь азимутальную составляющую B_φ.

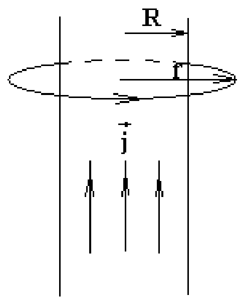


Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{B}$ по контуру в виде окружности в плоскости перпендикулярной оси провода с током. Пусть центр окружности находится на оси провода. Рассмотрим сначала окружность, радиус которой r меньше радиуса проводника R.

$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \qquad => \qquad B_\varphi \cdot l = \frac{4\pi}{c} j \cdot S \qquad => \qquad B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi r^2 \qquad =>$$

$B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} r$ — азимутальная составляющая поля внутри проводника с плотностью тока $\vec{j}$ при $r \le R$.

Рассмотрим теперь окружность, радиус которой r больше радиуса проводника R.



$$\oint_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \qquad => \qquad B_\varphi \cdot l = \frac{4\pi}{c} j \cdot S \qquad => \qquad B_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi R^2 \qquad =>$$

$B_\varphi = 2\pi \frac{j}{c} \cdot \frac{R^2}{r}$ — азимутальная составляющая поля снаружи проводника при $r \ge R$.

Экзамен. 3 Магнитное поле плоского слоя с током.

Пусть в объеме между двумя параллельными плоскостями текут токи с одинаковой во всех точках плотностью тока $\vec{j}$.

$\vec{B} = \vec{B}_j + \vec{B}_n + \vec{B}_\tau$

Докажем, что $B_j = 0$ — отсутствует составляющая магнитного поля вдоль тока внутри и снаружи плоского слоя.

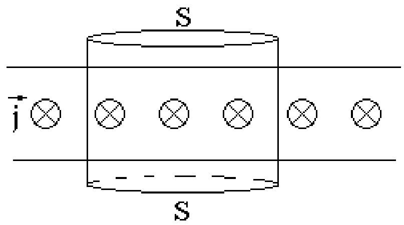
По закону Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c} \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r} \right]}{r^3}$. Заменим $Id\vec{l} \to \vec{j}dV$ и получим

$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r} \right]}{r^3} \cdot dV$ => $d\vec{B} \perp \vec{j}$ => $dB_j = 0$

Тогда $B_j = 0$.

Докажем теперь, что отсутствует составляющая магнитного поля перпендикулярная плоскому слою $B_n = 0$.

Рассмотрим поток магнитного поля через поверхность цилиндра, донышки которого параллельны плоскому слою и симметрично расположенного относительно слоя.



Поток может создавать только составляющая магнитного поля B_n. Эта составляющая создает поток только через донышки цилиндра. Из симметрии задачи потоки через оба донышка одинаковые, тогда

$\Phi_B = \Phi_{B_n} = 2B_n S$.

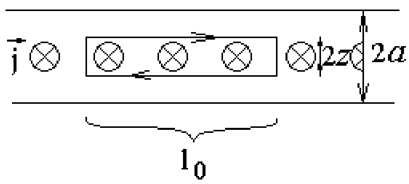
Это с одной стороны, а с другой стороны поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$. Следовательно,

$B_n = 0$ внутри и снаружи плоского слоя с током.

Осталось найти составляющую B_τ, направленную по касательной к плоскостям слоя и перпендикулярную токам.

Рассмотрим циркуляцию поля $\vec{B}$ по прямоугольному контуру.

Пусть $|z| \le a$.

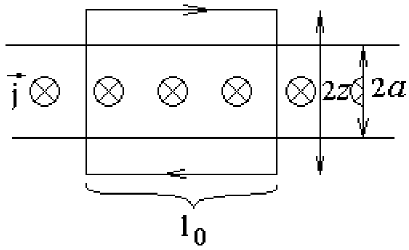


Вклад в циркуляцию дают только горизонтальные отрезки. Вклад двух горизонтальных отрезков одинаков. Тогда

$\oint\limits_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I$ => $2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} jS$ => $2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2zl_0$ =>

$B_\tau = \dfrac{4\pi}{c} jz$ — магнитное поле внутри слоя $|z| \le a$ в направлении параллельном границам слоя и перпендикулярно току.

Пусть теперь $|z| \ge a$.



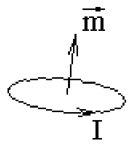
$$\oint\limits_l B_l dl = \frac{4\pi}{c} I \quad => \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} jS \quad => \quad 2B_\tau l_0 = \frac{4\pi}{c} j \cdot 2al_0$$

=>

$B_\tau = \dfrac{4\pi}{c} ja$ — магнитное поле снаружи слоя $|z| \ge a$ в направлении параллельном границам слоя и перпендикулярно току.

Экзамен. Магнитный диполь. Момент сил, действующих на виток с током в однородном магнитном поле.

$\vec{m} \equiv \dfrac{I}{c} \vec{S}$ — определение магнитного дипольного момента тока I в контуре, ограничивающем площадку $\vec{S}$. Направление дипольного момента образует правый винт с направлением тока.



Факультативная вставка.

В системе СИ: $\vec{m} = I\vec{S}$.

Магнитный дипольный момент может быть выражен иначе:

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S} = \frac{I}{2c} \oint\limits_l \left[\vec{r}, d\vec{l} \right] = \frac{1}{2c} \int\limits_V \left[\vec{r}, \vec{j} \right] dV .$$

Конец факультативной вставки.

Докажем, что момент сил $\vec{M}$, действующих на рамку с током в магнитном поле $\vec{B}$ равен:

$$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B} \right].$$

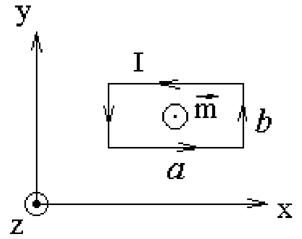
В системе СИ равенство выглядит также.

Это равенство аналогично равенству $\vec{M} = \left[\vec{p}, \vec{E} \right]$ в электростатике.

Докажем сначала для прямоугольной рамки с током.

Выберем направление оси z системы координат вдоль вектора $\vec{m}$ (перпендикулярно плоскости рамки), оси x и y повернем вокруг оси z и направим вдоль сторон рамки с током.

Обозначим длину рамки вдоль оси x за a, вдоль оси y — за b.

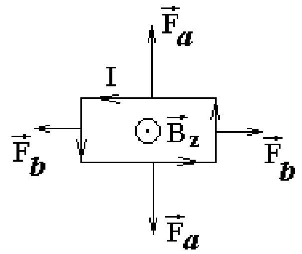


Произвольное магнитное поле $\vec{B}$ разложим на составляющие вдоль осей координат:

$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z$.

Докажем требуемое равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ для каждой отдельной компоненты поля $\vec{B}$.

Рассмотрим магнитное поле с одной составляющей $\vec{B} = \vec{B}_z$.



Направление и величина сил на рисунке определяются законом Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}, B\right]$.

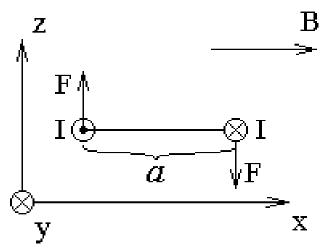
Из рисунка видно, что противоположно направленные силы попарно дают нулевой момент. Следовательно, $\vec{M} = 0$ для всех 4-х сил.

С другой стороны, $\left[\vec{m}, \vec{B}\right] = 0$, так как $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{B}$.

Следовательно, при $\vec{B} = \vec{B}_z$ условие $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ выполнено.

Рассмотрим теперь магнитное поле вдоль оси x.

$\vec{B} = \vec{B}_x$.



На отрезках рамки длиной a, которые направлены вдоль оси x и, соответственно, вдоль поля $\vec{B}$, сила Ампера равна нулю.

Сумма сил равна нулю. При этом условии момент сил не зависит от положения начала координат. Выберем начало координат в середине левого отрезка с током. Тогда плечо для силы Ампера, действующей на левый отрезок, равно нулю, и момент сил определяется только силой, действующей на правый отрезок. Момент силы $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ направлен вдоль оси y, так как вектор $\vec{r}$ направлен слева направо.

Это с одной стороны, а с другой стороны вектор $\left[\vec{m}, \vec{B}\right] = \left[\vec{m}_z, \vec{B}_x\right]$ также направлен вдоль оси y. Следовательно, $\vec{M} \uparrow\uparrow \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$.

Покажем, что эти векторы не только одинаково направлены, но и равны по величине.

Момент сил равен произведению силы на плечо

$M = aF$.

Подставим сюда выражение для силы из закона Ампера $d\vec{F} = \frac{I}{c} \cdot \left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$ откуда $F = \frac{I}{c} bB$. Тогда

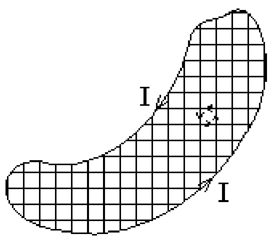
$$M = a\frac{I}{c}bB = \frac{I}{c}SB = \left|\vec{m}\right| B = \left|\left[\vec{m}, \vec{B}\right]\right|.$$

Следовательно, равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ доказано при $\vec{B} = \vec{B}_x$.

Аналогично доказывается, что $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ при $\vec{B} = \vec{B}_y$.

Складывая равенства $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ для трех составляющих вектора $\vec{B}$, получим, что равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ выполняется для любого вектора $\vec{B}$ и прямоугольной рамки с током.

Любой контур в плоскости можно приблизительно представить, как суперпозицию токов в малых прямоугольных рамках:



Складывая токи прямоугольных рамок, получим ток по краю контура. Для каждой i-ой прямоугольной рамки доказано, что

$\vec{M}_i = \left[\vec{m}_i, \vec{B}\right]$.

Просуммируем это равенство по всем прямоугольным контурам, по всем i, и получим

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{m}_i, \vec{B}\right] = \sum_i \left[\frac{I}{c}\vec{S}_i, \vec{B}\right] = \left[\frac{I}{c}\sum_i \vec{S}_i, \vec{B}\right] = \left[\frac{I}{c}\vec{S}, \vec{B}\right] = \left[\vec{m}, \vec{B}\right].$$

Тогда

$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$, что и требовалось доказать.

Для поверхности неплоского контура будем считать равенство $\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i$ определением вектора суммарной поверхности, тогда равенство $\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{B}\right]$ будет справедливо и для неплоского контура.