Экзамен. Напряженность магнитного поля (продолжение).

$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, что вполне аналогично соотношению для электрических полей $\vec{D} \equiv \vec{E} + 4\pi\vec{P}$. Оба равенства можно прочесть одинаково: индукция поля равна сумме напряженности поля и 4π, умноженному на объемную плотность дипольного момента.

Из равенства $\oint\limits_l \left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c} I$ следует

$\oint\limits_l \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c} I$ — теорема о циркуляции напряженности магнитного поля в интегральной форме. Из интегральной формы следуют две другие: дифференциальная форма и форма для границы раздела сред.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases}$$

— связь напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и токов проводимости в трех формах.

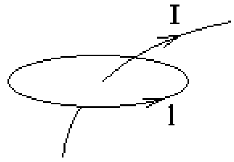
В системе СИ: $\oint\limits_l H_l dl = I$ $\quad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$ $\quad \vec{m} = I\vec{S}$ $\quad \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Экзамен. Основные формулы для магнитного поля в среде.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \end{cases} \qquad \begin{cases} div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\left(\vec{M}\right) = \frac{\vec{j}\,'}{c} \\ \oint\limits_l M_l dl = \frac{I'}{c} \\ M_{2\tau} - M_{1\tau} = \frac{i'}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}\,'\right) \\ \oint\limits_l B_l dl = \frac{4\pi}{c}\left(I + I'\right) \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}\left(i + i'\right) \end{cases}$$

Во всех равенствах направление обхода контура и направление тока образуют правый винт,



$\vec{\tau} = \left[\frac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to 2} \right]$ — единичный вектор по касательной к поверхности, по которой текут токи, и перпендикулярный токам.

Факультатив. Сравнение формул для электрического и магнитного полей.

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$	$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$
$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$
$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$	$\vec{m} = \frac{I}{c}\vec{S}$
$div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$	$rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$
$div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\left(\rho + \rho'\right)$	$rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \vec{j}\,'\right)$
$div\left(\vec{P}\right) = -\rho'$	$rot\left(\vec{M}\right) = \frac{\vec{j}\,'}{c}$
$rot\left(\vec{E}\right) = 0$	$div\left(\vec{B}\right) = 0$
$\varphi = \frac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{r^3}$	$\vec{A} = \frac{\left[\vec{m}, \vec{r}\right]}{r^3}$
$\vec{E} = 3\frac{\left(\vec{p}, \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$	$\vec{B} = 3\frac{\left(\vec{m}, \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$

Факультатив. Электрическое и магнитное поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Граничные условия позволяют найти поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

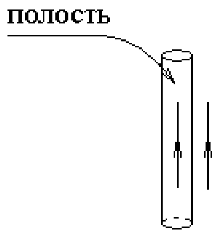
Если на границе полости нет свободных поверхностных зарядов и поверхностных токов проводимости $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \vec{i} = 0 \end{cases}$, то граничные условия для электрического и магнитного полей выглядят одинаково:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0 \end{cases},$$

Поэтому дальнейшие рассуждения одинаковы для электрического и магнитного полей.

Рассмотрим полость в виде длинного цилиндра с осью цилиндра направленной вдоль поля.

Для цилиндрической полости, вытянутой вдоль поля, линии поля идут по касательной к боковой поверхности цилиндра полости и почти не искривляются.



Граничные условия на боковой поверхности полости:

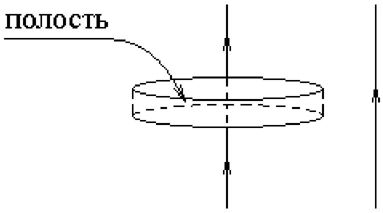
$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$ или $H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0$. =>

Напряженность в полости, вытянутой вдоль поля, одинаковая в среде и в полости.

Индукция поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем напряженность электрического или магнитного поля в веществе.

Для цилиндрической полости, сплюснутой перпендикулярно полю, линии поля направлены перпендикулярно донышкам полости и, проходя через донышки, почти не искривляются.



Граничные условия на донышках полости:

$D_{2n} - D_{1n} = 0$ или $B_{2n} - B_{1n} = 0$ =>

Индукция в полости, сплюснутой перпендикулярно полю, одинаковая в среде и в полости. Напряженность поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем электрическую или магнитную индукцию в веществе.

<u>Совсем факультативная вставка.</u>

Рассмотрим полость в форме шара. Электрическое поле.

Пусть:

$\vec{E}_0$ — напряженность электрического поля вдали от полости,

Придумаем, что $\vec{E}_1 = \overrightarrow{const}$ — напряженность однородного электрического поля внутри полости.

$\vec{E}_p = 3\frac{(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}$ — напряженность электрического поля точечного диполя.

Придумаем, что поле снаружи полости $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$.

Проверим, что придуманное поле удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon E_{2n} - E_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

Подставим

$$\begin{cases} E_{1n} = E_1 \cos(\theta) \\ E_{1\tau} = E_1 \sin(\theta) \\ E_{2n} = E_0 \cos(\theta) + 3\frac{p\cos(\theta)}{R^3} - \frac{p\cos(\theta)}{R^3} = E_0\cos(\theta) + 2\frac{p\cos(\theta)}{R^3} \\ E_{2\tau} = E_0 \sin(\theta) - \frac{p\sin(\theta)}{R^3} \end{cases}$$

в

$$\begin{cases} E_{1n} = \varepsilon E_{2n} \\ E_{1\tau} = E_{2\tau} \end{cases}$$

и после сокращения первого равенства на $\cos(\theta)$, а второго — на $\sin(\theta)$ получим

$$\begin{cases} E_1 = \varepsilon E_0 + 2\varepsilon\frac{p}{R^3} \\ E_1 = E_0 - \frac{p}{R^3} \end{cases}.$$

Откуда

$$E_1 = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon}E_0.$$

Аналогично для магнитного поля:

$$H_1 = \frac{3\mu}{1+2\mu}H_0$$

или

$$B_1 = \frac{3}{1+2\mu}B_0$$

Конец совсем факультативной вставки.

Экзамен. Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость среды.

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ — определение χ_m — магнитной восприимчивости среды. Аналогично $\vec{P} = \chi\vec{E}$ для электрического поля.

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ — определение μ — магнитной проницаемости среды. Аналогично $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ для электрического поля.

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \vec{H} + 4\pi\chi_m\vec{H} = \left(1 + 4\pi\chi_m\right)\vec{H} = \mu\vec{H} \qquad =>$$

$\mu = 1 + 4\pi\chi_m$ аналогично $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$.

В системе СИ:

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H} \qquad \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} \qquad \vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \qquad \mu = 1 + \chi_m$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \varepsilon = 1 + \chi$$

Факультатив. Связанные токи обычно присутствуют только на поверхности намагниченной среды.

$$\vec{j}\,' = c \cdot rot\left(\vec{M}\right) = c \cdot rot\left(\chi_m\vec{H}\right)$$

Если магнетик однородный, то магнитную восприимчивость χ_m можно вынести за знак производной везде, кроме точек границы магнетика. Вынесем χ_m за знак ротора и получим

$$\vec{j}\,' = c \cdot \chi_m \cdot rot\left(\vec{H}\right) = c \cdot \chi_m \cdot \frac{4\pi}{c}\vec{j} = 4\pi\chi_m\vec{j} \qquad =>$$

$$\vec{j}\,' = 4\pi\chi_m\vec{j}$$

Если в объеме намагниченной среды нет токов проводимости $\vec{j}$, то нет и связанных токов $\vec{j}\,'$. Поэтому связанные токи обычно протекают только по поверхности намагниченной среды.

Экзамен. Два способа вычисления векторного потенциала *A* магнитного поля, создаваемого намагниченной средой.

$$d\vec{A} = \frac{\vec{j} \cdot dV}{cr} \qquad => \qquad \vec{A}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{c}\int\limits_{V'} \frac{\vec{j}\,'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dV'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} + \frac{1}{c}\int\limits_{S'} \frac{\vec{i}\,'\left(\vec{r}\,'\right) \cdot dS'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|}$$

Здесь в правой части равенства обычно отлично от нуля только второе слагаемое, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика.

$$\vec{A} = \frac{\left[\vec{m}, \vec{r}\right]}{r^3} \qquad => \qquad \vec{A}\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{V'} \frac{\left[\vec{M}\left(\vec{r}\,'\right), \vec{r} - \vec{r}\,'\right]}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

<u>Факультативная вставка.</u>

Интегралы для векторного потенциала, как и для потенциала, создаваемого поляризованным диэлектриком, содержат интегрируемую особую точку $\vec{r} - \vec{r}\,' = 0$. Особенность интегрируемая, так как ее можно устранить заменой переменной интегрирования $\vec{r}\,'$ на $\vec{r}_0 = \vec{r}\,' - \vec{r}$.

<u>Конец факультативной вставки.</u>

Факультатив. Два способа вычисления магнитного поля *B*, создаваемого намагниченной средой.

Первый способ.

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\left[\vec{j}, \vec{r}\right]}{r^3} \cdot dV \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int\limits_{V'} \frac{\left[\vec{j}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}'\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \frac{1}{c} \oint\limits_{S'} \frac{\left[\vec{i}'(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}'\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

Здесь отличен от нуля обычно только второй интеграл, так как связанные токи обычно протекают только по поверхности магнетика. Второй интеграл имеет неинтегрируемую особую точку, если точка вычисления магнитного поля находится на поверхности со связанными токами. На такой поверхности поле $\vec{B}$ испытывает скачок и не имеет определенного значения, магнитное поле испытывает скачок на токонесущей поверхности.

Второй способ.

$$\vec{B} = 3\frac{(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{8}{3}\pi \vec{m} \delta(\vec{r}) \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int\limits_{V'} \left\{ 3\frac{\left(\vec{M}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}'\right) \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV' + \frac{8}{3}\pi \vec{M}(\vec{r})$$

Здесь интегралы нужно понимать в смысле главного значения. Подробнее смотрите аналогичный вопрос для электрического поля.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) - 4\pi \vec{M}(\vec{r})$$

<u>Факультатив. Третий способ вычисления магнитного поля намагниченной среды.</u>

Третий способ вычисления магнитного поля — найти напряженность магнитного поля $\vec{H}$ магнитных зарядов, которых на самом деле нет.

Магнитное поле, создаваемое намагниченной средой, во всех отношениях такое, как будто оно создано магнитными зарядами.

По аналогии с электрическим полем можно построить и теорию магнитного поля:

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{H} = q_m \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{m} = q_m \vec{l}$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}$$

Однако оказалось, что магнитное поле создается токами, а не зарядами.

Причем при усреднении внутриатомного магнитного поля получается поле $\vec{B}$, а не $\vec{H}$.

Третий способ вычисления магнитного поля $\vec{B}$ имеет следующий алгоритм: $\vec{M} \to \sigma'_m \to \vec{H} \to \vec{B}$.

Здесь $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma'_m$ аналогично $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ для диэлектриков.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \oint_{S'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \sigma'_m(\vec{r}') \cdot dS'$$

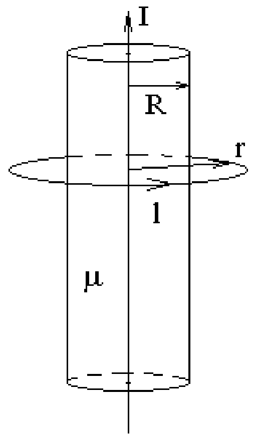
$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}.$$

Примеры решения задач с магнетиками.

Экзамен. 1. Магнитное поле длинного провода с током в цилиндрической оболочке из магнитного материала.

$$\vec{B} = \vec{B}_\varphi + \vec{B}_r + \vec{B}_z$$

$H_\varphi = ?$



$$\begin{cases} \oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I \\ H_l = H_\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H_\varphi l = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow \quad 2\pi r \cdot H_\varphi = \frac{4\pi}{c} I \quad \Rightarrow$$

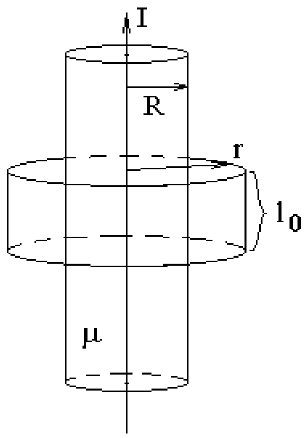
$H_\varphi = \frac{2I}{cr}$. Тогда с учетом $\vec{B} = \mu\vec{H}$ получим

$B_\varphi = \mu\frac{2I}{cr}$ при $r < R$ и $B_\varphi = \frac{2I}{cr}$ при $r > R$

Докажем, что двух остальных составляющих магнитного поля нет.

$B_r = ?$

Рассмотрим поток поля $\vec{B}$ через поверхность цилиндра, положение которого соответствует симметрии задачи.



Поток поля $\vec{B}$ может создавать только составляющая B_r. Эта составляющая может создать поток только через боковую поверхность цилиндра. Тогда

$$\Phi_B = \Phi_{B_r} = B_r S = 2\pi r l_0 \cdot B_r$$

Поток поля $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю $\Phi_B = 0$, следовательно, $B_r = 0$.
