Факультатив. Энергия магнитного поля.

Это та же магнитная энергия токов, только выраженная через поле, а не через токи.

$$W=\frac{1}{2}\sum_{k,i}\frac{I_k I_i}{c^2}L_{ki}=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\cdot\left(\sum_i L_{ki}\frac{I_i}{c}\right)=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\cdot\left(\sum_i \Phi_{ki}\right)=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\Phi_k$$

Подставим сюда полученное раньше выражение для потока $\Phi_B=\int\limits_S\left(\vec{B},d\vec{S}\right)=\int\limits_S\left(rot\left(\vec{A}\right),d\vec{S}\right)=\oint\limits_l\left(\vec{A},d\vec{l}\right)$ и получим

$$W=\frac{1}{2}\sum_k\frac{I_k}{c}\oint\limits_{l_k}\left(\vec{A},d\vec{l}_k\right).$$

Заменим здесь элемент тока $Id\vec{l}$ на $\vec{j}dV$, тогда

$$W=\frac{1}{2}\sum_k\int\limits_{V_k}\left(\vec{A},\frac{\vec{j}_k}{c}\right)dV_k \qquad =>$$

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_V\left(\vec{A},\frac{\vec{j}}{c}\right)dV.$$

Подставим сюда плотность токов проводимости $\vec{j}$ из равенства $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}$, откуда $\frac{\vec{j}}{c}=\frac{1}{4\pi}\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]$. Тогда

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_V\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)dV.$$

Возьмем интеграл по частям. Перебросим производную $\vec{\nabla}$ с одного сомножителя $\vec{H}$ на другой $\vec{A}$ и получим

$$W=\frac{1}{8\pi}\oint\limits_S\left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right)-\frac{1}{8\pi}\int\limits_V\left(\underline{\vec{A}},\left[\vec{\nabla},\vec{H}\right]\right)dV$$

Здесь в правом интеграле производную $\vec{\nabla}$ нужно брать от подчеркнутого выражения $\vec{A}$. Левый интеграл по поверхности стремится к нулю при стремлении объема, ограниченного поверхностью, к бесконечности. В правом интеграле поменяем местами сомножители векторного произведения с изменением знака интеграла и сделаем циклическую перестановку векторов в смешанном скалярно векторном произведении. Тогда

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V=\infty}\left(\vec{H},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)dV$$

Здесь $\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]=rot\left(\vec{A}\right)=\vec{B}$, тогда

$W = \int\limits_{V=\infty} \dfrac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi} dV$ — энергия магнитного поля. Эту формулу нужно знать к экзамену, но ее вывод помнить не нужно.

Тогда $w = \dfrac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi}$ — объемная плотность энергии магнитного поля.

В изотропной среде $\vec{B} = \mu\vec{H}$ и $w = \dfrac{\mu H^2}{8\pi}$.

В самом общем случае нелинейной или гистерезисной зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ справедлива следующая формула

$$dW = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$$

без доказательства.

Факультатив. $\oint\limits_S \xrightarrow[V\to\infty]{} 0$.

Докажем, что $\oint\limits_S \left(\vec{A},\left[d\vec{S},\vec{H}\right]\right) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0$.

Пусть S — сфера с очень большим радиусом. Тогда из любой точки на поверхности S все токи выглядят, как один точечный магнитный диполь. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &H \sim \frac{1}{r^3} \\ &A \sim \frac{1}{r^2} \\ &S \sim r^2 \end{aligned}\right\} \quad => \quad \oint\limits_S \sim \frac{1}{r^3} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Факультатив. Строгое определение индуктивности.

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = \int\limits_{V=\infty} \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi} dV \qquad =>$$

$L \equiv \dfrac{c^2}{4\pi I^2} \cdot \int\limits_{V=\infty} \left(\vec{B},\vec{H}\right) \cdot dV$ — индуктивность контура L не зависит от величины тока I в контуре, так как магнитные поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ пропорциональны току I.

Аналогично можно определить коэффициент взаимной индукции:

$L_{ki} \equiv \dfrac{c^2}{4\pi I_i I_k} \cdot \int\limits_{V=\infty} \mu\left(\vec{H}_k,\vec{H}_i\right) \cdot dV$, где $\vec{H}_k$ и $\vec{H}_i$ — напряженности магнитного поля, создаваемые токами в k-ом и i-ом контурах.

Факультатив. Сравнение формул для энергии электрического и магнитного полей.

Электричество	Магнетизм
$W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \frac{q_k q_i}{r_{ki}}$ (в вакууме)	$W = \frac{1}{2}\sum_{k,i} \frac{I_k I_i}{c^2} L_{ki}$
$\frac{1}{r_{ki}} = \frac{1}{\left\lvert \vec{r}_k - \vec{r}_i \right\rvert}$	$L_{ki} = \oint\limits_{l_k}\oint\limits_{l_i} \frac{\left(d\vec{l}_k, d\vec{l}_i\right)}{\left\lvert \vec{r}_k - \vec{r}_i \right\rvert}$ (в вакууме)
$W = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i \varphi_i$	$W = \frac{1}{2}\sum_{i} \frac{I_i}{c}\Phi_i$
(сумма по свободным зарядам)	(сумма по токам проводимости)
$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi \cdot dV$	$W = \frac{1}{2c}\int\limits_V \left(\vec{j}, \vec{A}\right)\cdot dV$
(по свободным зарядам)	(по токам проводимости)
$w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
$w = \frac{\left(\vec{D}, \vec{E}\right)}{8\pi}$	$w = \frac{\left(\vec{B}, \vec{H}\right)}{8\pi}$
$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}, d\vec{D}\right)$	$dw = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{H}, d\vec{B}\right)$

Экзамен. Гипотеза Максвелла о токах смещения.

Не путайте токи смещения со связанными токами намагниченных сред.

Рассмотрим дивергенцию равенства $rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Дивергенция левой части равенства равна нулю:

$$div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = \left(\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right]\right) = \left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right]\right) = 0.$$

Дивергенция правой части не равна нулю при $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$:

$$div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right) = \frac{4\pi}{c} div\left(\vec{j}\right) = \frac{4\pi}{c}\cdot\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) \neq 0.$$

Чтобы обобщить уравнение $rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ на случай $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$ можно предположить, что

$rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \vec{X}$, где $\vec{X}$ — необходимая поправка к уравнению магнитостатики.

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X} \qquad \Rightarrow$$

$$0=div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=div\left(\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\vec{X}\right)=\frac{4\pi}{c}div\left(\vec{j}\right)+div\left(\vec{X}\right).$$

Учтем, что $div\left(\vec{j}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и получим

$$0=-\frac{4\pi}{c}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)$$

Учтем теперь, что $4\pi\rho=div\left(\vec{D}\right)$ и получим

$$0=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(div\left(\vec{D}\right)\right)}{\partial t}+div\left(\vec{X}\right)=div\left(\vec{X}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0 \qquad .$$

Из того, что дивергенция некоторого поля равна нулю, вовсе не следует, что само поле равно нулю. Например, $div\left(\vec{B}\right)=0$, что не означает равенства нулю магнитного поля $\vec{B}$.

Максвелл сделал предположение, что $\vec{X}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0$ $\Rightarrow$

$\vec{X}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, которое не обязательно следует из того, что $div\left(\vec{X}\right)=div\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$. Таким образом Максвелл получил:

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Максвелл ввел понятие токов смещения $\vec{j}_{см}\equiv\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, тогда

$$rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)$$

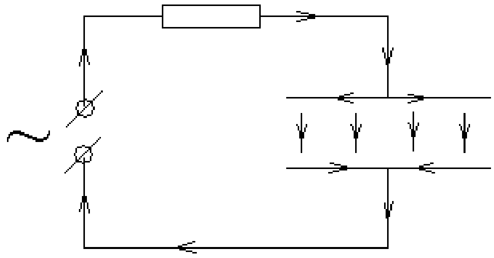
Токи смещение, потому что они выражаются через вектор электрического смещения $\vec{D}$.

Аналогично $\mathcal{E}_{инд}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$ — ЭДС индукции выражается через вектор магнитной индукции $\vec{B}$.

$$\begin{cases} rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right) \\ div\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad div\left(\vec{j}+\vec{j}_{см}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\vec{j}+\vec{j}_{см}}=0 \quad —$$

поток вектора $\vec{j}+\vec{j}_{см}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Тогда линии суммы токов проводимости и токов смещения замкнуты (не рвутся).

Например, в следующей схеме линии токов проводимости замыкаются линиями токов смещения внутри конденсатора.



Экзамен. Система уравнений Максвелла.

(один из основных вопросов курса)

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

— система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Для решения задач обычно удобнее использовать те же уравнения Максвелла только в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ \oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ \oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \end{cases}$$

Прокомментируем каждое из 4-х уравнений.

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D = 4\pi Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема не может быть доказана, но Максвелл предположил, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_B}{dt}$. Заметим, что закон Фарадея содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ содержит частную производную от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ по времени. Дело в том, что изменение потока при движущемся контуре дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд} = \mathcal{E} \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца $\vec{F}_Л$, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью $\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_Л}{q} = \frac{1}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$, но не дает вклад в циркуляцию $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$ поля $\vec{E}$. В циркуляцию дает вклад только частная производная по времени от потока $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$.

Третье уравнение $\Phi_B = 0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $\oint\limits_l H_l dl = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right)$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла.

Чтобы уравнения имело смысл решать относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить их так называемыми материальными связями:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\,\vec{H} \end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В некоторых случаях уравнения можно дополнить законом Ома $\vec{j} = \lambda\,\vec{E}$, если он выполнятся, и если токи не заданы явным образом.

В системе СИ: $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=\rho \\ rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \\ rot\left(\vec{H}\right)=\vec{j}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

В системе СИ: $\begin{cases} \vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E} \\ \vec{B}=\mu_0\mu\vec{H} \\ div\left(\vec{j}\right)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0 \\ \vec{j}=\lambda\vec{E} \end{cases}$.

<u>Факультативная вставка.</u>

Система уравнений Максвелла избыточна. В ней есть лишние уравнения.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{E},0\right)=0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно–векторном произведении $\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0=div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=div\left(-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right) \quad => $$

$-\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right)=0$ => $div\left(\vec{B}\right)=const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ не изменяется со временем.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right)=0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно,

$div(\vec{B}) = 0$.

Аналогично из уравнения $rot(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ можно получить, что

$div(\vec{D}) = 4\pi\rho$.

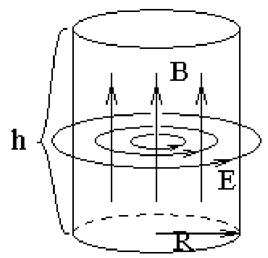
<u>Конец факультативной вставки.</u>

Экзамен. Токи Фуко.

Токи Фуко — это те же токи индукции только в сплошном проводнике, а не в проводящем контуре, как обычные токи индукции.

Рассмотрим проводящий цилиндр в однородном переменном магнитном поле $B = B_0 \cdot \cos(\omega t)$, которое направлено вдоль оси цилиндра.

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля



$rot(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ <=> $\oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$ =>

$E \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\pi r^2 B)$ =>

$E = -\frac{r}{2c} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{r}{2c} \cdot \frac{\partial(B_0 \cdot \cos(\omega t))}{\partial t} = \frac{B_0\omega}{2c} \cdot r \cdot \sin(\omega t)$ =>

$E = \frac{B_0\omega}{2c} \cdot r \cdot \sin(\omega t)$.

Это электрическое поле вызывает токи Фуко

$j = \lambda E = \frac{\lambda B_0 \omega}{2c} \cdot r \cdot \sin(\omega t)$.

В системе СИ: $j = \lambda E = \frac{\lambda B_0 \omega}{2} \cdot r \cdot \sin(\omega t)$.

Интересно рассмотреть среднюю мощность ленц-джоулева тепла, идущего на нагрев цилиндра.

Пусть $\langle v \rangle$ — среднее по времени и по объему значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла.

$\nu = \left(\vec{j}, \vec{E}\right) = \lambda E^2 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{4c^2} r^2 \sin^2\left(\omega t\right)$ — объемная плотность мощности в соответствии с законом Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.

Усреднение по времени сомножителя синус в квадрате дает: $\left\langle \sin^2\left(\omega t\right)\right\rangle_t = \frac{1}{2}$. И действительно, $\sin$ и $\cos$ отличаются только сдвигом фаз на $\frac{\pi}{2}$, тогда средние значения их квадратов равны, а сумма средних значений квадратов равна единице, так как $\sin^2\left(\omega t\right) + \cos^2\left(\omega t\right) = 1$.

Тогда

$\left\langle \nu \right\rangle_t = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8c^2} r^2$ — среднее по времени значение объемной плотности мощности ленц-джоулева тепла. Осталось усреднить эту величину по объему цилиндра.

$$\left\langle \nu \right\rangle = \frac{\int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t dV}{V}$$

Для вычисления интеграла мысленно разобьем объем цилиндра цилиндрическими поверхностями с близкими радиусами, тогда

$$\int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t dV = \int\limits_0^R \left\langle \nu \right\rangle_t h \cdot 2\pi r\, dr = \int\limits_0^R \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{8c^2} r^2 h \cdot 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4c^2} \cdot \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{4c^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16c^2} R^4 \qquad =>$$

$$\left\langle \nu \right\rangle = \frac{1}{V} \cdot \int\limits_V \left\langle \nu \right\rangle_t dV = \frac{1}{h \cdot \pi R^2} \cdot \frac{\pi \lambda \omega^2 B_0^2 h}{16c^2} R^4 = \frac{\lambda \omega^2 B_0^2}{16c^2} R^2 \sim R^2 \qquad =>$$