

### Экзамен. Токи Фуко (продолжение).

Чем больше радиус цилиндра, тем сильнее нагрев в единице объема.

Качественно такой результат можно объяснить тем, что в случае большого радиуса цилиндра токам Фуко есть, где разбежаться.

-----

Сердечник трансформатора делают наборным из большого числа тонких пластин, чтобы уменьшить потери на нагрев сердечника токами Фуко.

Дело в том, что если в первичную обмотку трансформатора подать переменное напряжение, то в сердечнике возникает переменное магнитное поле и токи Фуко.

В наборном сердечнике им трудно разбежаться.

$$\text{В системе СИ: } \langle \nu \rangle = \frac{\lambda B_0^2 \omega^2}{16} R^2$$

### Экзамен. Вектор Пойнтинга.

(вектор Умова — Пойнтинга)

Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения энергии.

Энергия в некотором объеме уменьшается, если она вытекает через границу объема.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$w = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{8\pi} + \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi}.$$

Рассмотрим изменение энергии, например, электрического поля:

$$dw = d \left( \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{8\pi} \right) = \frac{1}{8\pi} \{ (\vec{D}, d\vec{E}) + (\vec{E}, d\vec{D}) \}.$$

Два слагаемых в этой сумме одинаковы по величине. И действительно, для линейного, возможно, анизотропного диэлектрика

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad D_k = \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \quad \Rightarrow$$

$$(\vec{D}, d\vec{E}) = \sum_k D_k dE_k = \sum_k \left( \sum_i \varepsilon_{ki} E_i \right) dE_k = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki} E_i dE_k$$

$$(\vec{E}, d\vec{D}) = \sum_i E_i dD_i = \sum_i E_i d \left( \sum_k \varepsilon_{ik} E_k \right) = \sum_{k,i} \varepsilon_{ik} E_i dE_k$$

С учетом  $\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$  получаем  $(\vec{D}, d\vec{E}) = (\vec{E}, d\vec{D})$ . Тогда

$$dw = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}, d\vec{D}).$$

Аналогично для энергии магнитного поля  $dw = \frac{1}{4\pi}(\vec{H}, d\vec{B})$ .

$dw = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ (\vec{E}, d\vec{D}) + (\vec{H}, d\vec{B}) \right\}$  — изменение объемной плотности энергии

электромагнитного поля. Эта формула справедлива в более общем случае, чем

исходная формула  $w = \frac{(\vec{D}, \vec{E})}{8\pi} + \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi}$ . Формула  $dw = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ (\vec{E}, d\vec{D}) + (\vec{H}, d\vec{B}) \right\}$

справедлива и в случае нелинейной зависимости индукции поля от напряженности и в случае гистерезисной зависимости.

Тогда  $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ \left( \vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left( \vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right\}$ , куда в правую часть производные

по времени можно подставить из уравнений Максвелла

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \cdot \text{rot}(\vec{H}) - 4\pi \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot}(\vec{E}) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( \vec{E}, c \cdot \text{rot}(\vec{H}) - 4\pi \vec{j} \right) + \left( \vec{H}, -c \cdot \text{rot}(\vec{E}) \right) \right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{E}, \vec{j}) + \frac{c}{4\pi} \left\{ -(\vec{E}, \text{rot}(\vec{H})) + (\vec{H}, \text{rot}(\vec{E})) \right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{E}, \vec{j}) + \frac{c}{4\pi} \left\{ -(\vec{E}, [\vec{\nabla}, \vec{H}]) + (\vec{H}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]) \right\}$$

Здесь подчеркнуты величины, на которые действует оператор дифференцирования  $\vec{\nabla}$ .

В обоих смешанных скалярно–векторных произведениях сделаем циклические перестановки векторов так, чтобы вектор  $\vec{\nabla}$  оказался на первом месте, а затем в первом векторном произведении поменяем местами векторы с изменением знака произведения. Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{j}, \vec{E}) + \frac{c}{4\pi} \left\{ (\vec{\nabla}, [\vec{E}, \vec{H}]) + (\vec{\nabla}, [\vec{E}, \vec{H}]) \right\}.$$

Два слагаемых в фигурных скобках можно объединить, как производную от произведения:

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{j}, \vec{E}) + \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla}, [\vec{E}, \vec{H}]),$$

где убраны подчеркивания, так как производные берутся от всех величин, которые стоят за знаком производной  $\vec{\nabla}$ .

Скалярное произведение вектора  $\vec{\nabla}$  на какой-либо другой вектор — это дивергенция другого вектора, тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{j}, \vec{E}) + \operatorname{div} \left( \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \right).$$

Тогда

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{j}, \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{S}), \text{ где } \vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi} \cdot [\vec{E}, \vec{H}] \text{ — вектор Пойнтинга. Эти два}$$

равенства нужно помнить к экзамену.

Из равенства  $-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{j}, \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{S})$  виден физический смысл вектора Пойнтинга  $\vec{S}$ . Чтобы его понять рассмотрим объем, в котором нет потерь на Ленц-джоулево тепло, то есть  $(\vec{j}, \vec{E}) = 0$ . Тогда получим равенство

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{S}) = 0. \text{ Рассмотрим другое, но очень похожее равенство}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0. \text{ Это равенство следует, из закона сохранения заряда. Если}$$

объемная плотность заряда уменьшается, то заряд вытекает из объема, так что  $\vec{j}$  — плотность потока заряда, то есть заряд, протекающий в единицу

времени через единичную площадку перпендикулярную току заряда. Равенство

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{S}) = 0 \text{ с учетом закона сохранения энергии можно прочитать}$$

аналогично. Если объемная плотность энергии уменьшается, то энергия вытекает из объема, так что  $\vec{S}$  — плотность потока энергии, то есть энергия, протекающая в единицу времени через единичную площадку перпендикулярную току энергии.

$$\text{В системе СИ: } \vec{S} \equiv [\vec{E}, \vec{H}].$$

Равенство  $-\frac{\partial w}{\partial t} = (\vec{j}, \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{S})$  можно уточнить с учетом возможных сторонних сил с напряженностью  $\vec{E}_{\text{стор}}$ .

Рассмотрим закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме с учетом сторонних сил:

$$\nu = (\vec{j}, \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{j}, \vec{E}) = \nu - (\vec{j}, \vec{E}_{\text{стор}}) \quad \Rightarrow$$

$$(\vec{j}, \vec{E}_{\text{стор}}) - \frac{\partial w}{\partial t} = \nu + \operatorname{div}(\vec{S})$$

Это же уравнение в интегральной форме примет следующий вид:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i - \frac{\partial W}{\partial t} = N + \oint_S \left( \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}], d\vec{S} \right),$$

где в единицу времени энергия ЭДС и энергия поля расходуется на нагрев (ленц-джоулево тепло) и вытекает через границу объема. Здесь  $\mathcal{E}_i$  — любые ЭДС, кроме ЭДС индукции, работа которых учитывается изменением энергии электромагнитного поля.

Из последней формулы также следует физический смысл вектора Пойнтинга. Вектор Пойнтинга — это плотность потока энергии или энергия, которая в единицу времени протекает через единичную площадку перпендикулярную направлению движения энергии.

В системе СИ вектор Пойнтинга:  $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ .

Заметим, что для одного фотона

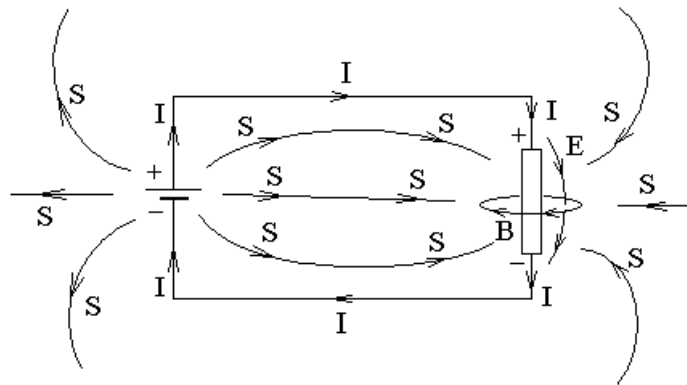
$$\left. \begin{array}{l} W = mc^2 \\ p = mc \end{array} \right\} \Rightarrow p = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Из равенств  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \\ p = \frac{W}{c} \end{array} \right.$  следует, что

$$\frac{\vec{S}}{c} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] \text{ — плотность потока импульса.}$$

### Экзамен. Примеры движения энергии электромагнитного поля.

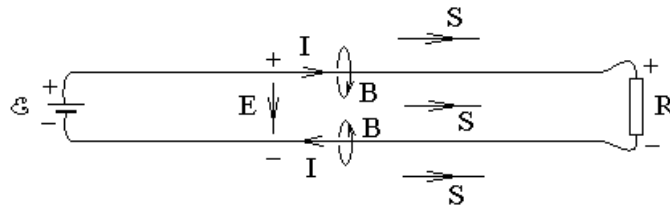
#### 1. Поле вокруг резистора с током.



$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}].$$

Линии поля  $\vec{S}$  втекают в резистор со всех сторон, а из батареи ЭДС — вытекают.

#### 2. Двухпроводная линия.



Энергия распространяется от ЭДС к нагрузке рядом с проводами линии, а не по проводам.

Есть два способа описания одной и той же энергии:

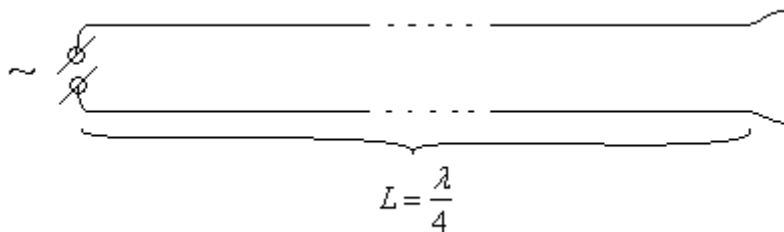
- 1). Энергия зарядов, которая передается по проводам.
- 2). Энергия поля, которая проходит рядом с проводами.

Энергия зарядов — это потенциальная энергия  $W = q\phi$ .

Если рассматривать переменные поля, то поле не потенциально. Поэтому у зарядов нет энергии в обычном смысле. Остается только энергия поля.

Энергию зарядов можно рассматривать до тех пор, пока  $r \ll \lambda$ , где  $r$  — размер электрической схемы. Так для частоты 50 Гц:  $\lambda = \frac{c}{\nu} = (300000 \text{ км/с}) / (50 \text{ 1/с}) = 6000 \text{ км}$ .

Рассмотрим источник переменного напряжения, в котором потенциалы на контактах изменяются синусоидально в противофазе друг другу. Пусть, для определенности, напряжение изменяется с частотой 50 Гц. Источник напряжения присоединен к длинной двухпроводной линии, а на удаленном конце двухпроводная линия короткозамкнута.



Пусть длина двухпроводной линии  $L = \frac{\lambda}{4} = 1500 \text{ км}$ . В таком случае оказывается, что короткое замыкание на удаленном конце линии будет восприниматься источником напряжения, как разрыв, а не как короткое замыкание.

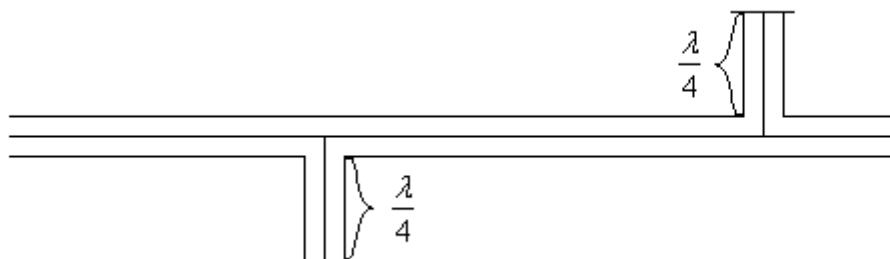
Длина  $\frac{\lambda}{4}$  эквивалентна сдвигу фаз  $\frac{\pi}{2}$ . Пусть в какой-то момент времени потенциал верхней клеммы источника максимален. На правом конце линии распространяющийся потенциал отстает по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ , а доходя до нижней клеммы отстает еще на  $\frac{\pi}{2}$ . В сумме отставание фазы на  $\pi$ , что означает, что сигнал от верхней клеммы приходит к нижней клемме в противоположной

фазе. То есть, когда на верхней клемме максимальный потенциал, к нижней клемме только доходит предыдущее минимальное значение потенциала. В этот же момент времени источник напряжения подает на нижнюю клемму минимальный потенциал, тот же, что и пришедший по двухпроводной линии. Следовательно, ток от источника не течет.

В этом смысле источник напряжения воспринимает короткое замыкание на удаленном конце линии, как разрыв.

В радиолокационных станциях старого типа использовалось излучение с длиной волны  $\lambda = (10 \div 100)$  см. Сигнал от генератора к антенне передавался по коаксиальному кабелю, который состоит из центрального провода и цилиндрической проводящей оболочки вокруг него. Обычно оболочку называют оплеткой, что действительно справедливо только для гибкого коаксиального кабеля. К антенне от генератора подавалась большая мощность. При этом любой диэлектрик в пространстве между центральной жилой и оплеткой не выдерживает разогрева. Если же пространство между центральной жилой и оплеткой оставить пустым, то непонятно, как удержать центральную жилу по центру оплетки.

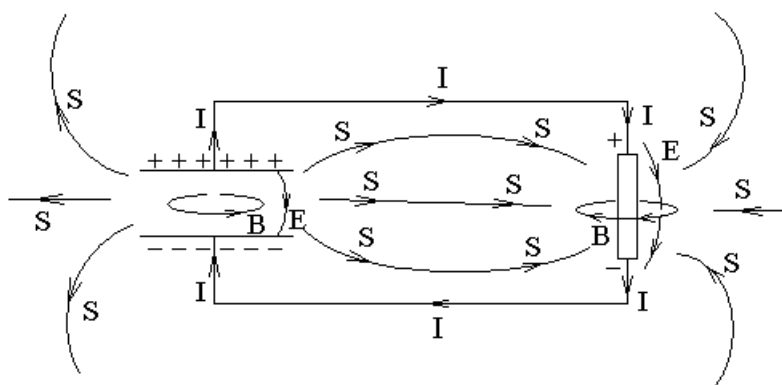
Решение было найдено в виде четвертьволнового стакана.



Конец четвертьволнового стакана является коротким замыканием, а сам стакан воспринимается сигналом центральной жилы, как разрыв, а не как короткое замыкание. По ходу распространения сигнала таких стаканов может быть несколько. В настоящее время четвертьволновым стаканом называют несколько иную конструкцию, а то, что рассмотрели мы, называется четвертьволновым штырем.

### 3). Разряд конденсатора через сопротивление.

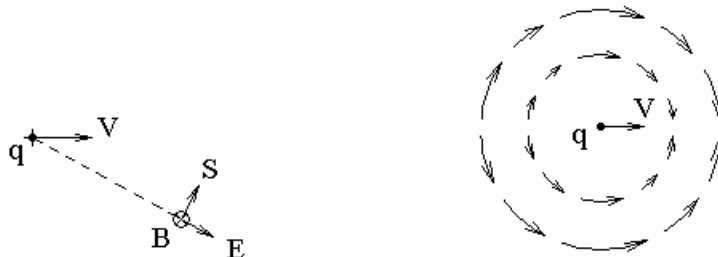
Энергия вытекает из плоского конденсатора через щели между пластинами.



#### 4). Равномерно и прямолинейно движущийся заряд.

В нерелятивистском случае энергия перетекает по полуокружностям, обегая вокруг заряда в направлении его движения.

$$\vec{E} = q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \frac{q}{c} \cdot \frac{[\vec{V}, \vec{r}]}{r^3} \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}]$$



#### Электрические цепи переменного тока.

(рассмотрение этой темы будет проведено в системе СИ)

#### Экзамен. Связь тока и напряжения для линейных элементов цепи переменного тока.

Для резистора:

$$U = RI$$

Для конденсатора:

$$\begin{cases} C \equiv \frac{q}{U} \\ I \equiv \frac{dq}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I(t') \cdot dt'$$

Для катушки индуктивности с системе единиц Гаусса  $\begin{cases} \mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = L \frac{I}{c} \end{cases}$ , а

в системе СИ:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \Phi_B = LI \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \dot{I}, \quad \text{где } \dot{I} \equiv \frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим реальную катушку индуктивности, как последовательно включенные идеальная катушка  $L$  и резистор  $R$ .

Рассмотрим закон Ома для участка цепи с учетом ЭДС:

$$U + \mathcal{E} = RI.$$

Пусть сопротивление участка цепи стремится к нулю  $R \rightarrow 0$ , тогда

$$U = -\mathcal{E}.$$

То есть согласно принятым правилам знаков напряжение, падающее на ЭДС, отличается знаком от величины самой ЭДС. Аналогично для катушки индуктивности:

$$U_L = -\mathcal{E}_{\text{инд}}.$$

Тогда связь тока и напряжения для линейных элементов цепи имеет вид:

$$\begin{cases} U_R = RI \\ U_C = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' \\ U_L = L \dot{I} \end{cases}$$