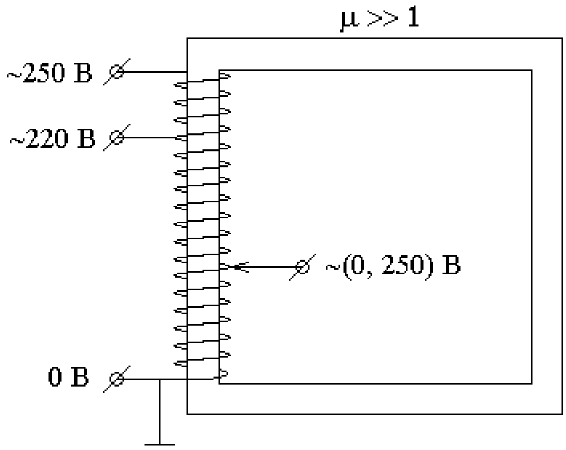
Факультатив. Лабораторный автотрансформатор (ЛАТР).



От сети переменного тока 220 Вольт на лабораторный автотрансформатор подается напряжение между клеммами обозначенными на рисунке, как "0 В" и "~220 В". Между клеммами "0 В" и "~250 В" можно снять напряжение 250 Вольт. Кроме трех рассмотренных отводов "0 В", "~220 В" и "~250 В" единственная обмотка лабораторного автотрансформатора имеет отвод в виде скользящего контакта. При перемещении контакта между ним и клеммой "0 В" образуется напряжение, которое можно изменять в пределах от нуля до 250 Вольт.

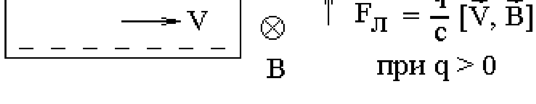
Экзамен. Преобразование электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.

(нерелятивистский случай, система СГС Гаусса)

Нестрогий вывод.

Рассмотрим проводник, который движется в магнитном поле $\vec{B}$ со скоростью $\vec{V}$ относительно системы отсчета *K*.

Свободные заряды внутри проводника движутся вместе с проводником, и на них действует сила Лоренца $\vec{F}_Л = \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$. Сила Лоренца сдвигает свободные заряды и приводит к появлению поверхностных зарядов σ на проводнике.



Поверхностные заряды создают электрическое поле $\vec{E}_\sigma$ внутри проводника.

Сила Лоренца и сила Кулона со стороны поля $\vec{E}_\sigma$ уравновешивают друг друга для оставшихся свободных зарядов внутри проводника.

Тогда $\quad q\vec{E}_\sigma + \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right] = 0 \quad$ =>

$\vec{E}_\sigma = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$ — поле поверхностных зарядов σ. Здесь значок σ поясняет причину возникновения электрического поля.

Рассмотрим теперь это же явление в системе отсчета K', которая движется вместе с проводником.

В системе K' заряды покоятся, следовательно, сила Лоренца равна нулю. Равнодействующая всех сил равна нулю, так как заряды покоятся. Следовательно, сила Кулона со стороны электрического поля $\vec{E}'$ в K' равна нулю. $\vec{E}'=0$.

В системе отсчета K есть поверхностные заряды. Их плотность при переходе в систему K' почти не изменяется, так как заряды не изменяются, а размеры проводника изменяются мало. Эти поверхностные заряды создают электрическое поле $\vec{E}'_{\sigma'}$ в K'.

Чтобы суммарное поле было равно нулю $\vec{E}'=0$ должно существовать еще одно поле в K' — поле $\vec{E}'_B$, причина которого в том, что в системе K есть магнитное поле $\vec{B}$.

$$\vec{E}' = \vec{E}'_{\sigma'} + \vec{E}'_B = 0 \qquad => \qquad \vec{E}'_B = -\vec{E}'_{\sigma'} \approx -\vec{E}_\sigma = \frac{1}{c}\cdot\left[\vec{V},\vec{B}\right]$$

В общем случае, если есть какие-то заряды в системе K, то эти заряды есть и в системе K', их поле $\vec{E}$ в обеих системах примерно одинаково. Тогда с учетом добавки $\vec{E}'_B$ поле в K':

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right].$$

Найдем теперь изменение поля $\vec{B}$ при переходе в движущуюся систему отсчета.

Рассмотрим поле точечного заряда q, покоящегося в системе отсчета K:

$$\begin{cases} \vec{E} = q\dfrac{\vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} = 0 \end{cases}.$$

Пусть система отсчета K' движется относительно системы K со скоростью $\vec{V}$.

Тогда в системе K' скорость заряда $\vec{V}' = -\vec{V}$.

Движущийся в K' заряд, как элемент тока, создает магнитное поле $\vec{B}'_E$ в соответствии с законом Био-Савара $d\vec{B} = \frac{I}{c}\cdot\frac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$. Заменим элемент тока $Id\vec{l} \to q\vec{V}$ и получим:

$$\vec{B}'_E = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{V}',\vec{r}'\right]}{r'^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\vec{V}',\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{q}{c}\frac{\left[\left(-\vec{V}\right),\vec{r}\right]}{r^3} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},q\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right].$$

Здесь $\vec{r}\,' \approx \vec{r}$, если пренебречь релятивистским сжатием.

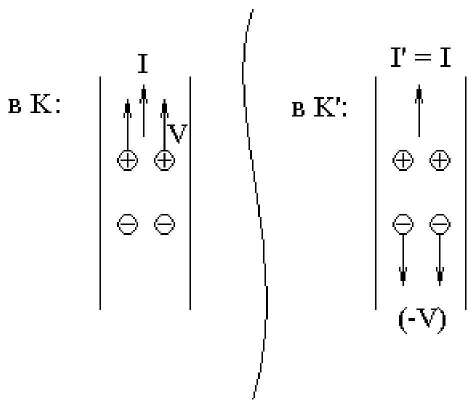
Это поле $\vec{B}'_E$ появляется в системе K' только потому, что есть поле $\vec{E}$ в K.

Заметим, что сила тока в незаряженном проводнике почти не изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую.

Пусть, например, в нейтральном проводнике отрицательные заряды неподвижны, а положительные движутся со скоростью $\vec{V}$.

Пусть система отсчета K' движется относительно системы K с той же скоростью $\vec{V}$.

Тогда в K' положительные заряды неподвижны, а отрицательные движутся со скоростью $\left(-\vec{V}\right)$. Сила тока в обоих случаях одинакова.



Если токи одинаковые, то и их магнитные поля одинаковы.

Тогда магнитные поля в двух системах отсчета отличаются на величину $\vec{B}'_E = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right]$:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right].$$

Суммируя выводы, получаем, что в нерелятивистском случае $V \ll c$:

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{E}\right] \end{cases}.$$

Факультатив. Точные формулы теории относительности для преобразования электрического и магнитного полей при переходе в движущуюся систему отсчета.

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \dfrac{E_y - \dfrac{V}{c} B_z}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ E'_z = \dfrac{E_z + \dfrac{V}{c} B_y}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \dfrac{B_y + \dfrac{V}{c} E_z}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ B'_z = \dfrac{B_z - \dfrac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Экзамен. Эффект Холла.

Рассмотрим проводник с током в магнитном поле. Магнитное поле можно представить в виде суммы двух составляющих: вдоль тока и перпендикулярно току. Составляющая магнитного поля вдоль тока не дает вклада в эффект Холла.

Если проводник с током находится в магнитном поле перпендикулярном току, то в проводнике возникает электрическое напряжение в направлении перпендикулярном току и перпендикулярном магнитному полю.

$U = R\,a\,j\,B$, где a — ширина проводника в направлении перпендикулярном магнитному полю $\vec{B}$, $\vec{j}$ — плотность тока, R — постоянная Холла (табличная характеристика материала проводника), U — напряжение в эффекте Холла.

Объяснение эффекта Холла.

Электрический ток — движение зарядов. При движении зарядов в магнитном поле на заряды действует сила Лоренца: $\vec{F}_Л = \frac{q}{c}\left[\vec{V}, \vec{B}\right]$.

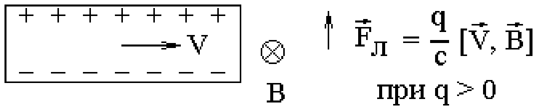
Эта сила смещает заряды в направлении перпендикулярном скорости или току и перпендикулярном магнитному полю.

Смещение зарядов приводит к образованию поверхностных зарядов. Поверхностные заряды создают поле $\vec{E}$, которое создает напряжение эффекта Холла:

$$U = \int_1^2 E_l dl.$$

При смещении зарядов поле $\vec{E}$ нарастает до тех пор, пока для оставшихся свободных зарядов ни будет выполнено условие:

$$q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right] = 0 \qquad => \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$$



Скорость зарядов можно выразить через плотность тока. Раньше, в начале рассмотрения магнитного поля, мы уже доказали, что плотность тока $\vec{j} = nq\left\langle\vec{V}\right\rangle$ связана с концентрацией зарядов n, величиной каждого заряда q и скоростью зарядов $\vec{V}$. Тогда

$$\left\langle\vec{V}\right\rangle = \frac{\vec{j}}{nq}.$$

Откуда с учетом $\vec{E} = -\frac{1}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right]$ получим

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\left[\frac{\vec{j}}{nq},\vec{B}\right] = -\frac{1}{cnq}\left[\vec{j},\vec{B}\right] \qquad =>$$

$$U = \int_1^2 E_l dl = E\int_1^2 dl = E\,a = -\frac{1}{cnq}a\,j\,B \qquad =>$$

$$U = R\,a\,j\,B,$$

где $R = -\frac{1}{cnq}$ — постоянная Холла.

В системе СИ: $R = -\frac{1}{nq}$.

Для электронов $q < 0$ =>

$R = -\frac{1}{cnq} > 0$, но для некоторых металлов $R < 0$.

Так $R > 0$ для: Fe, Co, Zn, Cd, Mo, W...

$R < 0$ для: Au, Ag, Pt, Cu, Ni, Al...

<u>Экзамен. Теорема Лармора.</u>

В магнитном поле электронная оболочка атома, как целое, приобретает вращение с угловой скоростью Ω:

$\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$, где $e > 0$ — модуль заряда электрона, m_e — масса электрона, c — скорость света, $\vec{B}$ — внешнее по отношению к атому магнитное поле.

$\vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{B}$

Заметим, что ядро атома вращается несколько иначе, так как для ядра другое отношение заряда к массе. Кроме того, заряд ядра распределен не по всей его массе, а преимущественно по поверхности ядра.

Теорема Лармора справедлива только для небольших магнитных полей, когда можно пренебречь эффектами, пропорциональными B^2 по сравнению с эффектами, пропорциональными B.

Докажем, что в магнитном поле $\vec{B}$ и во вращающейся системе отсчета $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$ на электрон действуют те же силы, что и без магнитного поля в не вращающейся системе отсчета. Это и будет доказательством теоремы Лармора.

В магнитном поле к силам, действующим на электрон, добавляется сила Лоренца

$$\vec{F}_Л = \frac{q}{c}\left[\vec{V},\vec{B}\right].$$

Во вращающейся системе отсчета к силам, действующим на электрон, добавляется сила Кориолѝса:

$\vec{F}_K = -2m_e\left[\vec{\Omega},\vec{V}'\right]$, где m_e — масса электрона, $\vec{V}'$ — скорость электрона относительно вращающейся системы отсчета.

Достаточно доказать, что $\vec{F}_Л + \vec{F}_K \approx 0$, пренебрегая слагаемыми, пропорциональными B^2 и более высокими степенями магнитного поля B.

Рассмотрим выражение для силы Кориолѝса в системе отсчета, которая вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$:

$$\vec{F}_K = -2m_e\left[\vec{\Omega},\vec{V}'\right] = -2m_e\left[\frac{e}{2m_e c}\vec{B},\vec{V}'\right] = -\frac{e}{c}\left[\vec{B},\vec{V}'\right] =$$

$$= \frac{e}{c}\left[\vec{V}',\vec{B}\right] \approx \frac{e}{c}\left[\vec{V}',\vec{B}'\right] = -\left(\frac{(-e)}{c}\left[\vec{V}',\vec{B}'\right]\right) = -\vec{F}_Л,$$

где $\vec{F}_Л$ сила Лоренца во вращающейся системе отсчета. Здесь относительное отличие $\vec{B}'$ от $\vec{B}$ мало и им можно пренебречь.

Тогда $\vec{F}_Л + \vec{F}_K \approx 0$ — доказано.

Заметим, что центробежной силой инерции во вращающейся системе отсчета можно пренебречь, так как $F_{ц.б.} \sim \Omega^2 \sim B^2$.

Теорема Лармора доказана.

Ларморовское вращение электронной оболочки иногда называют ларморовской прецессией. Поясним происхождение этого названия.

Электронные оболочки многих атомов вращаются и без внешнего магнитного поля. Это вращение похоже на вращение гироскопа.

В магнитном поле ось вращения этого гироскопа прецессирует со скоростью $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c}\vec{B}$ в соответствии с теоремой Лармора.

Поэтому вращение электронной оболочки в магнитном поле часто называют ларморовской прецессией.

В системе СИ: $\vec{\Omega} = \dfrac{e}{2m_e}\vec{B}$.

Факультатив. Дополнение к теореме Лармора.

Мы доказали, что в магнитном поле электронная оболочка может вращаться с частотой $\vec{\Omega} = \dfrac{e}{2m_e c}\vec{B}$.

Однако будет ли она раскручиваться при включении магнитного поля?

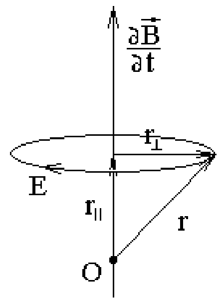
Оказывается, что будет.

Дело в том, что при включении магнитного поля вокруг его производной по времени возникает вихревое электрическое поле, которое и раскручивает электронную оболочку.

Для доказательства достаточно доказать, что в системе K', которая вращается с переменной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \dfrac{e}{2m_e c}\vec{B}$, сила со стороны вихревого электрического поля $\vec{F} = q\vec{E}$ уравновешивается силой инерции, которая возникает при ускоренном вращении системы K'.

$$\vec{F}_{ин} = -m_e\left[\dot{\vec{\Omega}},\vec{r}\right] = -m_e\left[\frac{e}{2m_e c}\dot{\vec{B}},\vec{r}\right] = -\frac{e}{2c}\left[\dot{\vec{B}},\vec{r}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r},\dot{\vec{B}}\right]$$

Найдем величину $\vec{E}$ вихревого электрического поля, которое возникает вокруг $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ производной от магнитного поля.



Здесь O — центр атома — атомное ядро, $\vec{r}$ — радиус-вектор электрона, $\vec{r}_{||}$ — составляющая радиус-вектора электрона вдоль производной $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{r}_{\perp}$ — составляющая радиус-вектора электрона перпендикулярная производной $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Вихревое электрическое поле можно найти из уравнения Максвелла $rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, которое в интегральной форме совпадает с законом электромагнитной индукции Фарадея:

$\oint\limits_l E_l dl = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$, где контур интегрирования — окружность, перпендикулярная производной $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dot{\vec{B}}$.

Тогда $2\pi r_\perp E = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\pi r_\perp^2 \dot{B}\right)$ => $E = -\frac{r_\perp}{2c}\dot{B}$ =>

Как видно из рисунка, направление вихревого векторного поля $\vec{E}$ совпадает с направлением векторного произведения, $\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right]$ тогда с учетом

$E = -\frac{r_\perp}{2c}\dot{B}$ получим

$$\vec{E} = \frac{1}{2c}\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right].$$

Сила, действующая на электрон с зарядом $q = -e$ со стороны вихревого электрического поля равна

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} = -\frac{e}{2c}\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right].$$

Сравним эту силу с силой инерции ускоренно вращающейся системы отсчета

$$\vec{F}_{ин} = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}, \dot{\vec{B}}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{||} + \vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_{||}, \dot{\vec{B}}\right] + \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right] = \frac{e}{2c}\left[\vec{r}_\perp, \dot{\vec{B}}\right],$$

где $\left[\vec{r}_{||}, \dot{\vec{B}}\right] = 0$, так как $\vec{r}_{||} \parallel \dot{\vec{B}}$. Тогда

$\vec{F} + \vec{F}_{ин} = 0$ — дополнение к теореме Лармора доказано.

<u>Экзамен. Гиромагнитное отношение.</u>

Гиромагнитное отношение — отношение магнитного момента электрона к его механическому моменту импульса.

Рассмотрим сначала отношение магнитного момента к механическому моменту импульса при движении электрона по окружности вокруг ядра атома.

Момент импульса:

$\vec{L} = \left[\vec{r}, m_e\vec{V}\right]$ => $L = r m_e V$.

Теперь найдем магнитный момент.

$$|\vec{m}| = \left|\frac{I}{c}\vec{S}\right| = \frac{I}{c}\pi r^2$$

Разделим магнитный момент на механический и получим модуль гиромагнитного отношения

$$|\gamma| = \frac{|\vec{m}|}{L} = \frac{I \cdot \pi r^2}{c \cdot r m_e V} = \frac{I \cdot \pi r}{m_e c V}.$$

Подставим в правую часть равенства $V = \frac{2\pi r}{T}$, где скорость равна отношению длины пути ко времени, T — период обращения электрона. Тогда

$$|\gamma| = \frac{I \cdot \pi r \cdot T}{m_e c \cdot 2\pi r} = \frac{IT}{2m_e c} = \frac{e}{2m_e c},$$

где последнее равенство получено с учетом того, что $I = \frac{e}{T}$ — сила тока равна отношению заряда ко времени его прохождения через сечение проводника (в нашем случае — через сечение орбиты электрона).

Момент импульса $\vec{L}$ образует правый винт с направлением движения электрона по орбите. Магнитный момент образует правый винт с направлением тока. Но заряд электрона отрицательный, поэтому магнитный момент образует левый винт с направлением движения электрона по орбите. В результате, момент импульса атома и его магнитный момент имеют противоположные направления.

Следовательно, гиромагнитное отношение отрицательно

$$\gamma = -\frac{e}{2m_e c}.$$

<u>Факультативная вставка.</u>

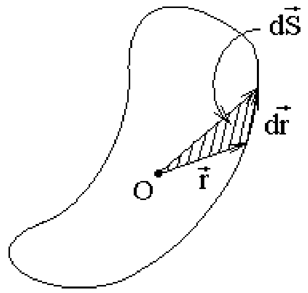
Найдем теперь гиромагнитное отношение в более общем случае движения электрона в атоме, например, по эллиптической орбите и покажем, что гиромагнитное отношение в этом случае не изменяется.

Рассмотрим момент импульса электрона при его движении вокруг ядра атома не обязательно по круговой орбите.

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m_e \vec{V}\right] = m_e \frac{\left[\vec{r}, d\vec{r}\right]}{dt}$$

Проведем усреднение этого выражения по замкнутой орбите движения электрона. Тогда

$$\vec{L} = m_e \frac{\oint\limits_l \left[\vec{r}, d\vec{r}\right]}{T}.$$



Из рисунка видно, что $d\vec{S}=\frac{1}{2}\left[\vec{r},d\vec{r}\right]$, так как вектор площадки $d\vec{S}$ направлен, как и векторное произведение $\left[\vec{r},d\vec{r}\right]$, а длина вектора $dS=\left|d\vec{S}\right|$ равна площади заштрихованного треугольника $dS=\frac{1}{2}\cdot r\cdot dr\cdot\sin\left(\angle\vec{r},d\vec{r}\right)$, что совпадает с половиной длины векторного произведения $\left[\vec{r},d\vec{r}\right]$.

Тогда $\oint\limits_{l}\left[\vec{r},d\vec{r}\right]=2\vec{S}$ =>

$\vec{L}=m_e\frac{2\vec{S}}{T}=-\frac{2m_e\vec{S}}{e}\cdot\frac{-e}{T}$.

Здесь отношение $\frac{-e}{T}$ равно силе тока для электрона на орбите в соответствии с определением силы тока $I=\frac{dq}{dt}=\frac{-e}{T}$. Тогда

$\vec{L}=-\frac{2m_e\vec{S}}{e}I=-\frac{2m_ec}{e}\cdot\frac{I}{c}\vec{S}=-\frac{2m_ec}{e}\vec{m}$ =>

$\vec{m}=-\frac{e}{2m_ec}\vec{L}$, где $e>0$ — модуль заряда электрона, m_e — масса электрона, $\vec{m}$ — магнитный момент орбитального движения электрона в атоме, $\vec{L}$ — механический момент электрона — момент импульса.

Конец факультативной вставки.

$\vec{m}=\gamma\vec{L}$ — определение гиромагнитного отношения γ.

$\gamma=-\frac{e}{2m_ec}<0$

$\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{L}$

В системе СИ: $\gamma=-\frac{e}{2m_e}$.

Факультатив. Спин электрона.

Изучение спектральных дублетов (пар линий) щелочных металлов (Na, K, ...) показало, что у каждого электрона кроме орбитального момента импульса должен быть еще и другой — так называемый спиновый момент импульса и соответствующий ему магнитный момент. Причем гиромагнитное отношение для спина вдвое больше, чем для орбиты:

$$\vec{m} = -\frac{e}{m_e c}\vec{L}$$

Этот момент импульса для наглядности можно приписать вращению электрона вокруг своей оси.

Никому неизвестно, почему спиновое гиромагнитное отношение ровно вдвое больше орбитального.

Согласно квантовой механике спиновый момент импульса может иметь только значение, выражающееся по формуле $\sqrt{s(s+1)}\hbar$, где s — так называемое спиновое квантовое число или спин. Каждой элементарной частице соответствует свое значение спина. Спин элементарных частиц может иметь одно из следующих значений $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Так для фотона $s = 1$, для электрона $s = \frac{1}{2}$.

Согласно квантовой механике орбитальный момент импульса электрона тоже может принимать только некоторые значения, которые удовлетворяют формуле $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ при целочисленном значении l. Как говорят орбитальный момент импульса квантуется. l — квантовое число орбитального момента импульса, оно может принимать значения $l = 0, 1, 2, \ldots$.

В так называемом приближении *LS*-связи для электронной оболочки атома сначала нужно сложить орбитальные моменты импульса разных электронов друг с другом и получить орбитальный момент электронной оболочки *L*. Потом нужно сложить спины разных электронов друг с другом и получить спин электронной оболочки *S*. И наконец, сложить орбитальный и спиновый моменты импульса электронной оболочки и получить полный момент импульса электронной оболочки *J*. Все они складываются как векторы. Так орбитальный момент импульса с длиной $\sqrt{L(L+1)}\hbar$ и спиновый момент импульса с длиной $\sqrt{S(S+1)}\hbar$ складываются в полный момент импульса с длиной $\sqrt{J(J+1)}\hbar$, где J — квантовое число полного момента импульса. Длина суммы двух векторов находится в пределах от модуля разности длин до суммы длин двух векторов, поэтому квантовое число J может принимать значения от $|L-S|$ до $|L+S|$ с шагом единица: $J = |L-S|, |L-S|+1, |L-S|+2, \ldots, |L+S|$.

С учетом орбитального и спинового моментов импульса:

$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e c} g\vec{L}$, где $1 \le g \le 2$. Здесь g — это подгоночный коэффициент, который называют фактором Ланде или множителем Ланде. Согласно квантовой теории

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$