

Экзамен. Диамагнетизм.

Магнитное поле \vec{B} вызывает намагниченность среды \vec{M} следующим образом:

$$\vec{B} \rightarrow \vec{\Omega} \rightarrow \vec{L} \rightarrow \vec{m} \rightarrow \vec{M}.$$

Рассмотрим эту цепочку в обратную сторону.

$\vec{M} = n \cdot \langle \vec{m} \rangle = n \cdot \langle \gamma \vec{L} \rangle$, где n — концентрация диполей с магнитным моментом \vec{m} , γ — гиромагнитное отношение, \vec{L} — механический момент импульса каждого атома.

$\vec{L} = I \vec{\Omega}$, здесь I — момент инерции электронной оболочки атома, $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения электронной оболочки.

По теореме Лармора $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \vec{B}$, где $e > 0$ — модуль заряда электрона, m_e — масса электрона, c — скорость света, \vec{B} — магнитное поле.

Делая подстановки, получаем:

$$\vec{M} = \frac{en\gamma I}{2m_e c} \vec{B}$$

Найдем теперь магнитную проницаемость μ .

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} = \vec{B} - 4\pi \frac{en\gamma I}{2m_e c} \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \left(1 - \frac{2\pi en\gamma I}{m_e c}\right) \vec{B} \quad \Rightarrow$$

с учетом $\vec{B} = \mu \vec{H}$ получаем:

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{2\pi en\gamma I}{m_e c}} \approx 1 + \frac{2\pi en\gamma I}{m_e c} < 1, \text{ так как } \gamma = -\frac{e}{2m_e c} g < 0.$$

Для диамагнетиков $\mu < 1$.

Диамагнетизм есть у всех материалов, но у парамагнетиков и ферромагнетиков намагниченностью за счет диамагнетизма пренебрегают по сравнению с другими вкладами в намагниченность.

Экзамен. Парамагнетизм газов в слабых полях.

(неквантовая теория)

Парамагнетики — это вещества, состоящие из атомов, которые имеют магнитный момент без внешнего магнитного поля.

Атомы парамагнетика — жесткие магнитные диполи.

$$\vec{m} \equiv \frac{I}{c} \vec{S} = \frac{I}{2c} \oint_l [\vec{r}, d\vec{l}] = \frac{I}{2c} \int_V [\vec{r}, \vec{j}] dV \quad \text{— магнитный дипольный момент рамки}$$

площадью \vec{S} с током I . Правая часть равенства — орбитальный магнитный момент электрона в атоме.

Выражение для энергии магнитного диполя $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ очень похоже на выражение для энергии электрического диполя $W = -(\vec{p}, \vec{E})$. Поэтому для

слабых магнитных полей и без учета квантовых эффектов теория парамагнетизма полностью аналогична теории поляризации полярных диэлектриков с точностью до замены:

$$\begin{cases} \vec{p} \rightarrow \vec{m} \\ \vec{E} \rightarrow \vec{B} \\ \vec{P} \rightarrow \vec{M} \end{cases}$$

Факультативная вставка.

Теорию поляризации полярных диэлектриков в сильных электрических полях не рассматривают, так как заметные нелинейные по полю эффекты могли бы проявиться только в таких сильных полях, в которых наступает электрический пробой газа, а напряженность электрического поля при этом падает. Газ превращается в ионизованный проводящий газ — плазму.

В сильном магнитном поле в отличие от сильного электрического поля никакого пробоя не наступает. Поэтому имеет смысл рассматривать теорию парамагнетизма в сильных магнитных полях. Мы этого делать не будем, чтобы не заострять внимания на математических выкладках.

В квантовой теории парамагнетизма учитывается, что проекция момента импульса атома на направление магнитного поля может принимать только дискретные значения $J_z \hbar$, где ось z направлена вдоль магнитного поля \vec{B} , J_z — квантовое число проекции полного момента импульса атома на направление магнитного поля \vec{B} . Величина J_z может принимать следующие значения $J_z = -J, -J + 1, -J + 2, \dots, J - 1, J$. Здесь J — квантовое число полного момента импульса атома, векторной суммы орбитального L и спинового S моментов импульса.

Дискретность проекции момента импульса $J_z \hbar$ приводит к дискретности проекции магнитного момента $m_z = \gamma \cdot J_z \hbar$ и к дискретности энергии магнитного диполя: $W = -m_z B$. Ниже следующие интегралы при этом заменяются конечными суммами.

Конец факультативной вставки.

Мы не будем рассматривать квантовую теорию парамагнетизма, заметим только, что ее предсказания для намагниченности близки к предсказаниям неквантовой классической теории, которую мы и рассмотрим.

$d\xi \sim e^{-\frac{W}{kT}} \cdot d\Omega$ — вероятность направления магнитного диполя в телесный угол $d\Omega$ с учетом распределения Больцмана по энергиям W .

Энергию магнитного диполя W можно выразить через θ — угол между векторами \vec{m} и \vec{B} :

$$W = -(\vec{m}, \vec{B}) = -|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta).$$

Телесный угол тоже может быть выражен через угол θ :

$$d\Omega = \sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

От угла φ сферической системы координат ничего не зависит. Тогда после суммирования по углам φ получим

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta.$$

Подставим выражения для энергии W и телесного угла $d\Omega$ в формулу для вероятности $d\xi$ и получим:

$$\begin{aligned} d\xi &= A \cdot e^{-\frac{W}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = A \cdot e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \approx \\ &\approx A \cdot \left(1 + \frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \end{aligned}$$

Здесь экспонента заменена отрезком ряда Тейлора с учетом того, что магнитное поле слабое.

Константу A можно найти из условия нормировки: $\int d\xi = 1 \Rightarrow$

$$1 = \int_0^\pi A \cdot \left(1 + \frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$d\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$$

$$M = n \cdot \langle |\vec{m}| \rangle = n \cdot \langle (\vec{m})_B \rangle = n \cdot \int (\vec{m})_B \cdot d\xi = n \cdot \int |\vec{m}| \cdot \cos(\theta) \cdot d\xi \Rightarrow$$

$$M = n \cdot \int_0^\pi |\vec{m}| \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT} \right) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot |\vec{m}|^2 \cdot B}{kT} \cdot \int_0^\pi \cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot |\vec{m}|^2 \cdot B}{kT} \cdot \frac{2}{3} = \frac{n \cdot |\vec{m}|^2 \cdot B}{3kT} \Rightarrow$$

$$\vec{M} = \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT} \vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \Rightarrow$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} = \vec{B} - 4\pi \cdot \frac{n \cdot |\vec{m}|^2 \cdot \vec{B}}{3kT} = \left(1 - \frac{4\pi n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT} \right) \vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{1}{1 - \frac{4\pi n \cdot |\vec{m}|^2}{3kT}} \vec{H}$$

Но $\vec{B} = \mu \vec{H}$, тогда

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}\pi \frac{n \cdot |\vec{m}|^2}{kT}} \Rightarrow$$

Для парамагнетиков $\mu > 1$.

Факультативная вставка.

Что изменится, если допустить рассмотрение сильных магнитных полей?

Для вероятности нужно оставить выражение в виде

$$d\xi = A \cdot e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta.$$

Для сильного поля экспоненту нельзя заменить отрезком ряда Тейлора.

Константу A по-прежнему можно найти из условия нормировки: $\int d\xi = 1$.

Тогда

$$1 = \int_0^\pi A \cdot e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = A \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{|\vec{m}| \cdot B \cdot \cos(\theta)}{kT}} d(\cos(\theta))$$

Обозначим для краткости $\eta = \frac{|\vec{m}| B}{kT}$ и $\zeta = \cos(\theta)$. Тогда

$$1 = A \int_{-1}^{+1} e^{\eta \zeta} d\zeta = A \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{\eta}$$

Откуда

$$A = \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}}$$

и

$$d\xi = \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}} e^{\eta \cdot \cos(\theta)} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta$$

По-прежнему

$$\begin{aligned} M &= n \cdot \langle |\vec{m}| \rangle = n \cdot \langle (\vec{m})_B \rangle = n \cdot \int (\vec{m})_B \cdot d\xi = n \cdot \int |\vec{m}| \cdot \cos(\theta) \cdot d\xi = \\ &= n \cdot |\vec{m}| \cdot \int_0^\pi \cos(\theta) \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}} e^{\eta \cdot \cos(\theta)} \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta \end{aligned}$$

Опять $\zeta = \cos(\theta)$ и

$$M = n \cdot |\vec{m}| \cdot \frac{\eta}{e^\eta - e^{-\eta}} \int_{-1}^1 \zeta e^{\eta \zeta} d\zeta = n \cdot |\vec{m}| \cdot \frac{1}{\eta(e^\eta - e^{-\eta})} \int_{-\eta}^{\eta} \mu e^\mu d\mu$$

И окончательно

$$M = n \cdot |\vec{m}| \cdot \left(\frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta - e^{-\eta}} - \frac{1}{\eta} \right), \text{ где } \eta = \frac{|\vec{m}| B}{kT}.$$

В очень сильном магнитном поле B , когда $\eta \rightarrow \infty$, все магнитные диполи повернутся вдоль поля \vec{B} , и намагниченность $M \approx n \cdot |\vec{m}|$ перестает расти с увеличением поля — это насыщение намагниченности.

Конец факультативной вставки.

Экзамен. Свойства ферромагнетиков.

1). $\mu \gg 1$

$$\begin{cases} B \gg H \\ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \end{cases} \Rightarrow B \approx 4\pi M \Rightarrow$$

Для ферромагнетиков магнитная индукция и намагниченность — почти одно и то же с точностью до коэффициента 4π .

В системе СИ: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, откуда $\vec{B} \approx \mu_0\vec{M}$.

2). Теория Вейсса.

Теория Вейсса — это теория ферромагнетизма, которую мы рассматривать не будем.

В этой теории в качестве исходного пункта взято необычное выражение для энергии атомарного магнитного диполя. Вместо $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ постулируется, что $W = -(\vec{m}, \vec{B} + b\vec{M})$, где $b\vec{M}$ — так называемое молекулярное поле, $b > 0$ — константа.

Молекулярное поле введено, чтобы объяснить, почему при устранении внешнего поля \vec{B} диполи остаются направленными в одну сторону, и получается постоянный магнит. Придуманное Вейссом молекулярное поле стремится удержать диполи в направлении намагниченности.

Дальнейшее построение теории Вейсса аналогично теории парамагнетизма только вместо $W = -(\vec{m}, \vec{B})$ нужно везде подставить $W = -(\vec{m}, \vec{B} + b\vec{M})$.

3). Доменная структура ферромагнетиков.

Характерный размер доменов (10—100) мкм.

Согласно квантовой теории, когда электронные оболочки двух атомов соприкасаются, между атомами возникает обменное взаимодействие.

В результате обменного взаимодействия магнитные моменты соседних атомов стремятся повернуться в одну сторону. Причина этого стремления лежит в тождественности электронов.

Факультативная вставка.

В квантовой механике есть соотношение неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Здесь Δx — среднеквадратичное отклонение от среднего значения x -координаты, при многократных попытках измерить x -координату электрона в одних и тех же условиях, Δp_x — среднеквадратичное отклонение x -проекции импульса электрона от среднего значения.

При приближении двух атомов друг к другу, когда их электронные оболочки начинают соприкасаться, электроны из разных атомов могут меняться местами. При этом неопределенность Δx в положении каждого электрона возрастает:

$$\Delta x \nearrow \Rightarrow \Delta p_x \searrow \Rightarrow |p_x| \searrow \Rightarrow p_x^2 \searrow \Rightarrow E_{\text{кин}} \searrow \Rightarrow E_{\text{полная}} \searrow \Rightarrow$$

притяжение.

Электроны легче обмениваются, если их магнитные диполи направлены в одну сторону. При этом полная энергия сильнее снижается.

Конец факультативной вставки.

Любая система стремится к минимуму энергии. Энергия обменного взаимодействия минимальна при одинаковом направлении магнитных диполей соседних атомов.

С другой стороны, если все магнитные диполи направлены в одну сторону, то образец намагничен и создает вокруг себя магнитное поле. Это

магнитное поле имеет энергию, объемная плотность которой $w = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi}$.

Энергия магнитного поля минимальна, когда магнитные диполи образца направлены случайным образом — хаотично.

Чтобы минимизировать сумму энергии обменного взаимодействия и энергии магнитного поля, образец самопроизвольно распадается на так называемые домены разных размеров (10—100) мкм для разных ферромагнетиков.

В каждом домене магнитные диполи направлены в одну сторону, а магнитные диполи разных доменов направлены хаотически. Если домены малы, то мало и магнитное поле образца. Если домены не слишком малы, то большинство атомов находится внутри домена, а не на его поверхности. Для атомов внутри домена энергия обменного взаимодействия минимальна.

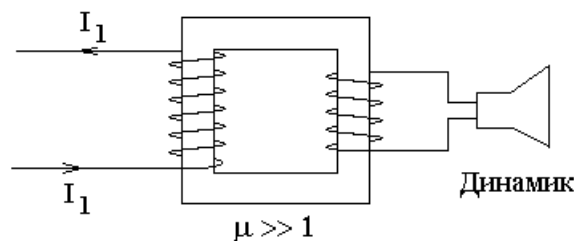
4). Точка Кюри.

При нагревании ферромагнитного материала есть критическая температура, при которой происходит фазовый переход из ферромагнитного состояния в парамагнитное состояние.

Эта критическая температура и называется температурой Кюри или точкой Кюри.

5). Эффект Баркгаузена.

Эффект Баркгаузена состоит в том, что в следующей схеме



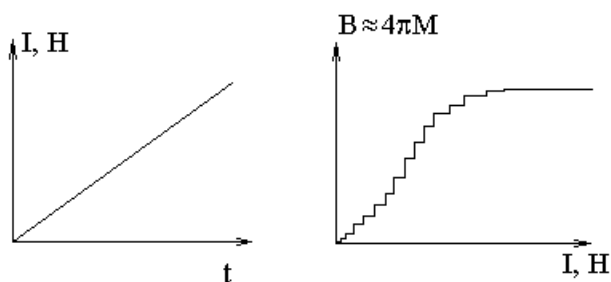
слышны щелчки из динамика, включенного во вторичную обмотку трансформатора, когда в первичной обмотке изменяется сила тока.

Во внешнем магнитном поле домены, направленные по полю, растут, а направленные против поля — тают. Это можно увидеть в микроскоп. Переход атома из одного домена в другой происходит без пространственного

перемещения атома, происходит только за счет поворота магнитного диполя электронной оболочки пограничного атома из направления, соответствующего одному домену, в направление, соответствующее соседнему домену.

Изменение границ доменов происходит скачками от одного дефекта примеси до другого. Эти скачки и вызывают эффект Баркгаузена — щелчки из динамика, включенного во вторичную обмотку трансформатора, когда в первичной обмотке изменяется сила тока.

Пусть, например, сила тока линейно нарастает со временем. Напряженность магнитного поля H пропорциональна силе тока I в обмотке и скачков не испытывает, так как согласно теореме о циркуляции: $Hl = \frac{4\pi}{c} NI$.



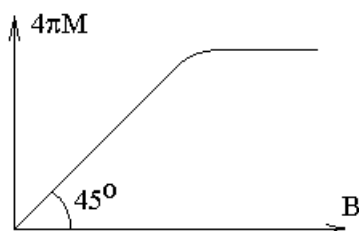
При изменении напряженности поля H скачками меняется намагниченность M вместе с магнитной индукцией $B \approx 4\pi M$. Скачок магнитной индукции сопровождается скачком потока магнитной индукции $\Phi_B = NBS$, что означает бесконечную производную от потока по времени и бесконечную ЭДС индукции: $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt}$. Эти короткие импульсы

напряжения во вторичной обмотке и проявляются в виде щелчков в динамике.

На самом деле скачок намагниченности происходит за конечное, хотя и малое время. По этой причине на частотах в сотни мегагерц и выше ферромагнетизма нет.

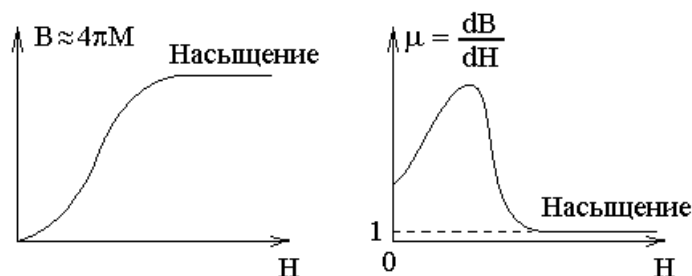
б). Насыщение намагниченности.

Намагниченность среды M зависит от магнитного поля B , но эта зависимость мало информативна, так как $B \approx 4\pi M$ для любого ферромагнетика, и зависимость $4\pi M$ от B — это прямая линия под углом 45° :



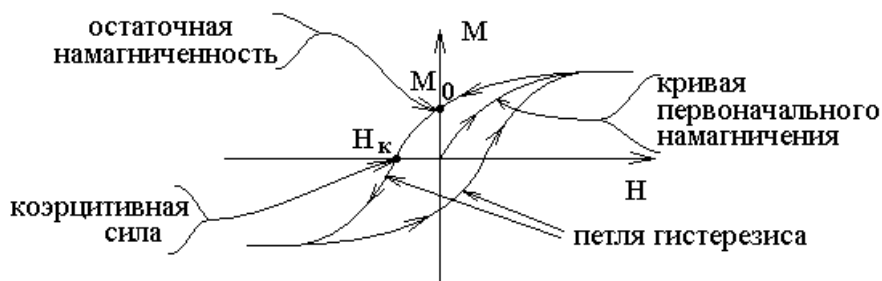
Поэтому рассматривают зависимость намагниченности M или магнитной индукции $B \approx 4\pi M$ от напряженности магнитного поля H . При малых напряженностях намагниченность быстро возрастает с ростом напряженности, а при больших — перестает расти. Это происходит, когда все магнитные диполи оказываются направлены вдоль магнитного поля.

Прекращение роста намагниченности — это и есть насыщение намагниченности.



7). Гистерезис (отставание).

Изменение намагниченности M отстает от изменения напряженности магнитного поля H . При изменении напряженности в одну, другую сторону, и обратно, зависимость намагниченности от напряженности образует петлю — так называемую петлю гистерезиса.



Если в начальный момент времени напряженность поля и намагниченность среды были равны нулю, то зависимость $M(H)$ описывает кривую первоначальной намагниченности.

Если после насыщения намагниченности убрать напряженность магнитного поля, то оставшееся значение намагниченности M_0 называется остаточной намагниченностью (постоянного магнита).

Напряженность магнитного поля H_k , необходимая для устранения остаточной намагниченности M_0 называется коэрцитивной силой.

Если остаточная намагниченность железа мала, то железо называют мягким. Его используют в трансформаторах. Жесткое железо используют для изготовления постоянных магнитов.

Факультативная вставка.

Сильные постоянные магниты получают на основе сплавов NdFeB — неодим-железо-бор. Например, магнит N 45 имеет объемную плотность

энергии магнитного поля $\frac{(\vec{B}, \vec{H})}{8\pi} = 45 \cdot 10^6$ (Гаусс*Эрстед). В вакууме индукции

1 Гс соответствует напряженность 1 Э. Казалось бы, остаточная магнитная индукция $B = \sqrt{45 \cdot 8\pi} \cdot 10^3$ Гс, однако согласно справочным таблицам она в 2.5 раза меньше этой величины ($B = 13500$ Гс). Вероятно, под объемной плотностью энергии в этом случае подразумевается энергия всего магнитного поля (внутри и вне магнита) отнесенная ко всему объему магнита. Для

сравнения: магнитное поле Земли на экваторе $B = 0.3$ Гс, на широте 50° $B = 0.5$ Гс. В системе СГС Гаусса магнитная индукция измеряется в Гауссах, а в системе СИ — в Теслах: $1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$. Напряженность магнитного поля соответственно в Эрстедах и Ампер/метр, соотношение единиц примерно: $1 \text{ Э} = 80 \text{ А/м}$.

Конец факультативной вставки.

8). Нагревание сердечника при перемагничивании.

$dw = \frac{1}{4\pi} (\vec{H}, d\vec{B})$ — изменение объемной плотности энергии магнитного

поля. С учетом $B \approx 4\pi M$ получаем $dw \approx (\vec{H}, d\vec{M})$.

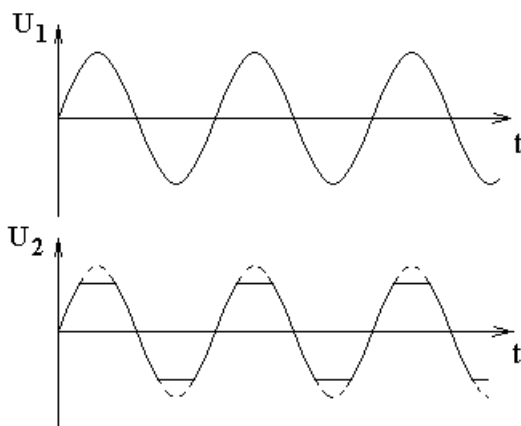
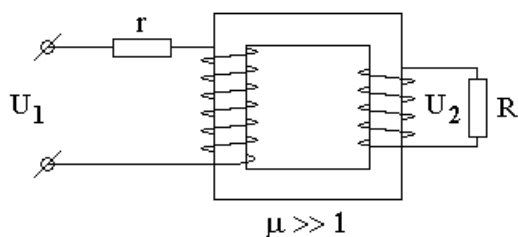
Изменение энергии в цикле перемагничивания $\nu = \frac{1}{4\pi} \oint H dB \approx \oint H dM$

переходит в теплоту сердечника сделанного из ферромагнетика. Теплота, выделяющаяся в единице объема ферромагнетика, равна площади петли гистерезиса $\nu \approx \oint H dM$. В системе СИ: $\nu \approx \mu_0 \oint H dM$.

9). При нормальной работе трансформатора сердечник нельзя вводить в насыщение.

Без насыщения сердечника $\mu \gg 1$. При насыщении $\mu \equiv \frac{dB}{dH} \approx 1$.

Индуктивность первичной обмотки трансформатора $L_{11} \sim \mu$. Следовательно, при насыщении сердечника трансформатора индуктивность первичной обмотки резко уменьшается. При этом возрастает ток холостого хода. При большом токе в первичной обмотке входное напряжение падает на активном сопротивлении первичной обмотки и не трансформируется во вторичную обмотку.



Напряжение во вторичной обмотке насыщается. Обычно трансформатор в таком режиме сильно греется и гудит.

На этом принципе работает феррорезонансный стабилизатор напряжения.

10). Размагничивание.

Многokратное перемангничивание с убывающей амплитудой магнитного поля размагничивает образец.