

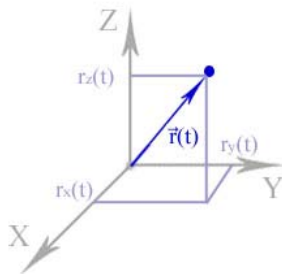
Глава 1: Механика

Глава 1.1: Кинематика

§ 1 Основные понятия кинематики

Минимальное количество чисел, при помощи которого можно задать положение тела в пространстве называется **числом степеней свободы**. Возникает естественный вопрос о минимальном числе степеней свобода в нашем мире. Для макроскопических тел минимальное число степеней свободы – 6. В микромире существуют объекты, которые в свободном состоянии имеют 3 степени свободы.

Для упрощения решения задач реальные физические объекты часто заменяются их математическими моделями, обладающими 3мя степенями свободы, т.е. **материальными точками**. **Материальной точкой** можно считать тело, размеры и форма которого не существенны при решении данной задачи.



Совокупность 3х координат материальной точки образуют **радиус-вектор** в трехмерном пространстве. **Траекторией** называется кривая, вычерчиваемая концом радиус-вектора материальной точки в процессе её движения.

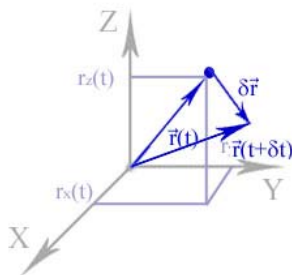
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ радиус-вектор меняется во времени.

$\delta\vec{r} = \vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)$, где

$\delta\vec{r}$ - изменение радиус-вектора

$\vec{r}(t + \delta t)$ - конечное положение

$\vec{r}(t)$ - начальное положение



Изменение радиус-вектора	$\delta\vec{r} = \vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)$
Скорость	$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t}$
Изменение скорости:	$\delta\vec{v} = \vec{v}(t + \delta t) - \vec{v}(t)$
Мгновенная скорость	$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \Big _{\delta t \rightarrow 0}$
Ускорение	$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t}$
Мгновенное ускорение	$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\delta\vec{v}}{\delta t} \Big _{\delta t \rightarrow 0}$

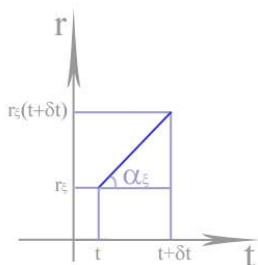
На заметку: Векторы \vec{r} и \vec{v} связаны между собой так же, как векторы \vec{v} и \vec{a} .

§ 2 Связь между основными величинами кинематики

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{pmatrix}$$

$$\langle v_\xi \rangle = \frac{\delta r_\xi}{\delta t} = \operatorname{tg} \alpha$$

α - секционный угол



Проекция средней скорости на координатную ось численно равна тангенсу угла наклона секущей, проходящей через начальную и конечную точки, к графику зависимости соответствующей координаты от времени.

$$v_\xi = \left. \frac{\delta r_\xi}{\delta t} \right|_{\delta t \rightarrow 0} = \operatorname{tg} \alpha_\xi$$

Мгновенная скорость направлена вдоль касательной к графику зависимости координат(ы) от времени.

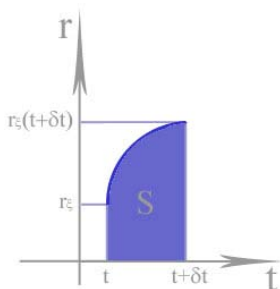
Скорость всегда можно найти по известной зависимости координаты от времени операцией дифференцирования. Нахождение скорости по известной траектории является **прямой задачей механики**.

Обратная задача механики: нахождение траектории по известной зависимости скорости от времени.

$$\delta r_\xi = v_\xi \delta t$$

Положение тела по известным скоростям находится интегрированием, при условии того, что известно начальное положение тела.

Перемещение тела вдоль каждой из координат численно равно площади под графиком зависимости скорости от времени.



Задача 2.1

Первую треть пути материальная точка двигалась со скоростью v_1 , вторую треть – v_2 , а остаток пути – со скоростью v_3 . Найдите среднюю скорость на всем пути.

Решение.

Обозначим весь путь за L .

Известно, что $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$

Т.е. средняя скорость равна отношению пути ко времени, за которое путь был пройден.

Время, затраченное на прохождение каждой трети пути равно $t_{\xi} = \frac{L}{3v_{\xi}}$

$$\text{Средняя скорость равна: } \langle \vec{v} \rangle = \frac{L}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{L}{\frac{L}{3v_1} + \frac{L}{3v_2} + \frac{L}{3v_3}} = \frac{3}{v_1^{-1} + v_2^{-1} + v_3^{-1}}$$

§ 3 Классический закон сложения скоростей и ускорений

Перемещение тела в неподвижной системе отсчета равно векторной сумме перемещения движущейся системы отсчета относительно неподвижной и перемещения тела в движущейся системе отсчета.

$$r(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

$$r(t + \delta t) = \vec{R}(t + \delta t) + \vec{r}'(t + \delta t)$$

-

$$r(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{R}}{\delta t} + \left. \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} \right|_{\delta t \rightarrow 0}$$

Скорость тела в неподвижной системе отсчета равна векторной сумме скорости движущейся системы отсчета относительно неподвижной и скорости движения тела в движущейся системе отсчета.

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}'_{\text{движ}}$$

Закон сложения ускорений выводится из закона сложения скоростей аналогично тому, как закон сложения скоростей выводится из закона сложения перемещений. Предлагаем читателю записать формулу закона сложения ускорений самостоятельно.

Задача 3.1

Мальчик гуляет с собакой по прямой дорожке и бросает ей палку на расстояние L от себя. Мальчик идет с постоянной скоростью v , собака бежит за палкой и возвращается к мальчику со скоростью u . Через какое время после броска собака вернется к мальчику?

Обозначим скорость движения собаки в с.о. «мальчик» как u' при движении вперед и u'' при движении назад.

$$u' = u - v \Rightarrow t' = \frac{L}{u - v}$$

$$u'' = u + v \Rightarrow t'' = \frac{L}{u + v}$$

$$t = t' + t'' = \frac{L \cdot (u + v) + L \cdot (u - v)}{u^2 - v^2}$$