

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет

Регистрационный номер  
рабочей программы учебной дисциплины:

10 / Ф3 / 12.2

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
*Высшая алгебра (основной поток).*

**основных образовательных программ высшего профессионального образования**

*Прикладные математика и физика, Физика, Радиофизика*

**подготовки по направлению 010600 Прикладные математика и физика**

**010700 Физика**

**010800 Радиофизика**

по профилю

*по всем профилям*

**для получения квалификации (степени)**

*бакалавр*

*Рабочая программа учебной дисциплины может использоваться при совпадении значения трудоёмкости в зачётных единицах в одной или нескольких основных и дополнительных образовательных программах, характеристики которых указываются на титульном листе*

|                                       |             |                          |                       |               |
|---------------------------------------|-------------|--------------------------|-----------------------|---------------|
| <b>код дисциплины</b>                 | <i>12.2</i> | <b>по учебному плану</b> | <b>форма обучения</b> | <i>очная.</i> |
| <b>виды промежуточной аттестации:</b> |             | <b>Зачётов</b>           | <b>экзаменов</b>      |               |
|                                       |             | <i>1</i>                 |                       | <i>2</i>      |

**Трудоёмкость учебной дисциплины** 9 **зачётных единиц**

Санкт-Петербург  
2010

## **1. Организационно-методический раздел**

**1.1. Цель изучения дисциплины:** обучение студентов первого курса физического факультета методам аналитической геометрии и линейной алгебры; формирование у студентов логического мышления; подготовка к восприятию других математических и физических дисциплин.

**1.2. Задачи курса:** изучение основных разделов аналитической геометрии и линейной алгебры; развитие навыков самостоятельного решения практических задач; обеспечение базы для усвоения приближенных методов вычислений и соответствующих компьютерных программ.

**1.3. Место курса в профессиональной подготовке выпускника:** дисциплина «Высшая алгебра» является общеобразовательной базовой дисциплиной в подготовке профессионального физика и служит основой для изучения других математических, физических и вычислительных дисциплин.

**1.4. Требования к уровню освоения дисциплины «Высшая алгебра»**

- знать содержание раздела «Аналитическая геометрия»,
- знать содержание раздела «Линейная алгебра»,
- иметь достаточно полное представление о возможностях применения разделов курса в различных математических и физических задачах,
- иметь достаточные практические навыки по решению задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

## 2. Объем дисциплины, виды учебной работы, формы текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| Время чтения лекций по дисциплине | 1-2 семестр   |
| Примерное число студентов         | 90 студентов  |
| Всего аудиторных занятий          | 135 часов   |
| Из них лекций                     | 75 часов  |
| Практические занятия              | 60 часов  |
| Самостоятельная работа студентов  | 115 часов   |
| Итого (трудоемкость дисциплины)   | 250 часов   |
| Текущий контроль                  | Контрольные работы, коллоквиумы – один в первом и один во втором семестре, в сроки, предусмотренные учебным планом  |
| Промежуточный контроль            | Зачет по практическим занятиям в первом семестре, два экзамена – в первом семестре и во втором семестре. Результаты коллоквиумов учитываются на экзаменах в соответствии с правилами, приведенными ниже.  |
| Итоговый контроль                 | Для студентов, обучающихся по направлению 010600 «Прикладные математика и физика», предусмотрен государственный экзамен по Математике (по циклу дисциплин ЕН.Ф.01). Вопросы курса «Высшая алгебра», выносимые на итоговый государственный экзамен, приведены в п.4.3. |

### **Правила проведения коллоквиума и учета результатов сдачи на экзамене.**

1. Коллоквиум и экзамен проводятся в письменной форме. Вопросы, выносимые на коллоквиумы и экзамены, указаны в разделе 4. Время работы составляет 90 минут.
2. Студенты, не сдавшие (не сдававшие) коллоквиум, сдают материал коллоквиума на экзамене соответствующего семестра. Между написанием работы по материалам коллоквиума или экзамена студентам предоставляется перерыв не менее 15 минут. Студенты, сдавшие коллоквиум, в день экзамена пишут только работу по материалу экзамена соответствующего семестра. Однако, в отдельных случаях, допускается передача коллоквиума с положительной оценки в день экзамена.
3. Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации на коллоквиумах и экзаменах категорически запрещено.
4. Билет коллоквиума или экзамена состоит из теоретической и практической частей. Теоретическая часть состоит из двух определений или формулировок согласно списку вопросов и одного вопроса для подробного изложения. Практическая часть состоит из четырех типовых задач согласно плану практических занятий.
5. Оценка "удовлетворительно" ставится за правильные определения и не менее чем две решенные задачи. Оценка "хорошо" ставится за изложенный (возможно, без доказательств) теоретический материал билета и не менее чем три решенные задачи. Оценка "отлично" ставится за полностью раскрытый теоретический материал и

полностью решенные задачи. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.

6. Итоговая оценка на экзамене определяется как среднее арифметическое оценок за коллоквиум и экзамен с округлением в пользу экзаменационной оценки при условии, что обе эти оценки не ниже 2 баллов в болонской шкале. Неудовлетворительное написание любой из частей экзамена влечет за собой неудовлетворительную итоговую оценку.

### 3. Содержание дисциплины

#### 3.1. Темы лекций по дисциплине:

1-й семестр (всего 30 часов, в середине семестра коллоквиум и в конце семестра экзамен)

#### Аналитическая геометрия

1. Векторы на плоскости и в пространстве. ( Понятие вектора, действия с векторами, проекция вектора на ось, координаты вектора.) Скалярное произведение векторов. ( Определение, свойства, выражение через координаты сомножителей.)
2. Определители второго и третьего порядка. ( Определение, основные свойства — линейность по строкам и столбцам, поведение при перестановках строк и столбцов, разложение по строкам и столбцам.)
3. Ориентация векторов на плоскости и в пространстве.
4. Векторное произведение пространственных векторов. Смешанное произведение трех пространственных векторов. ( Определение, свойства, геометрический смысл смешанного произведения как ориентированного объема.) Линейность векторного и смешанного произведений. Формулы в виде определителей. Двойное векторное произведение. Формула для двойного векторного произведения.
5. Прямая линия на плоскости. ( Определение, различные виды уравнения — параметрическое, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом, нормальное.) Расстояние от точки до прямой. ( Формула. Уравнения биссектрис углов между двумя прямыми.) Две прямые на плоскости. ( Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.) Пучок прямых на плоскости. ( Уравнение пучка прямых, проходящих через заданную точку и через точку пересечения двух заданных прямых.)
6. Плоскость в пространстве. ( Определение, различные виды уравнения плоскости — общее, в отрезках, нормальное, через три заданные точки.) Расстояние от точки до плоскости в пространстве. Пучок плоскостей в пространстве. ( Уравнение пучка, проходящего через линию пересечения двух заданных плоскостей.)
7. Прямая линия в пространстве. ( Определение, векторное и параметрическое уравнение, каноническая система.) Прямая линия как пересечение двух плоскостей.
8. Эллипс. Определение, уравнения (каноническое, параметрическое, в фокальной полярной системе координат), основные свойства. Соприкосновение прямой и эллипса. Уравнение касательной к эллипсу, проведенной в данной его точке. Оптическое свойство эллипса.
9. Гипербола. Определение, уравнения (каноническое, параметрическое, в фокальной полярной системе координат), основные свойства. Асимптоты гиперболы. Соприкосновение прямой и гиперболы. Уравнение касательной к гиперболе, проведенной в данной ее точке. Оптическое свойство гиперболы.

10 Парабола. Определение, уравнение, основные свойства. Соприкосновение прямой и параболы. Уравнение касательной к параболе, проведенной в данной ее точке. Оптическое свойство параболы.

11 Преобразования координат на плоскости — сдвиги, отражения, повороты. Анализ общего уравнения второго порядка на плоскости.

**Вышеуказанный материал выносится на коллоквиум в осеннем семестре.**

### **Матрицы, определители и системы линейных алгебраических уравнений**

1. Матрицы, действия над ними. Сложение матриц, умножение матриц на число, произведение матриц. Ассоциативность произведения матриц. Выражение строк и столбцов произведения матриц через строки и столбцы сомножителей. Транспонирование матриц. Транспонирование произведения матриц.
2. Перестановки. Понятие перестановки. Беспорядки, четность (знак) перестановки. Изменение четности перестановки при транспозициях (инверсиях) элементов. Обратная перестановка, четность обратной перестановки. Полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon$ .
3. Определители. Определение определителя. Линейность определителя по строке (столбцу). Определение определителя. Смена знака определителя при перестановке его строк (столбцов) местами. Значение определителя, составленного из строк (столбцов) исходной матрицы в произвольном порядке. Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения матриц. Разложение определителя по строке (столбцу). Миноры и алгебраические дополнения.
4. Обратная матрица. Определение правой и левой обратных матриц. Понятие матрицы, обратной к квадратной. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Присоединенная матрица. Формула для элементов обратной матрицы.
5. Системы линейных алгебраических уравнений крамеровского типа. Запись системы уравнений в матричных терминах и с помощью расширенной матрицы. Существование и единственность решения крамеровской системы. Формулы Крамера.
6. Метод Гаусса для вычисления определителей, решения крамеровских систем и обращения матриц. Эквивалентные преобразования систем, реализация прямого и обратного хода метода Гаусса.
7. Координатные пространства строк и столбцов. Линейная зависимость и линейная независимость систем строк (столбцов). 10 утверждений о линейной зависимости и независимости систем. Понятие максимальной линейно независимой подсистемы.
8. Ранг матрицы. Определение ранга матрицы по строкам, столбцам и минорам. Лемма о базовом миноре. Теорема о ранге. Действия со строками и столбцами матриц, сохраняющие ранг.
9. Системы линейных уравнений общего вида. Однородные и неоднородные системы. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости неоднородной системы. Свободные и зависимые переменные. Построение частного решения неоднородной системы и общего решения однородной системы.

**В конце первого семестра проводится экзамен.**

**2-й семестр** (всего 45 часов, в середине семестра коллоквиум и в конце семестра экзамен)

### **Линейные пространства и линейные операторы.**

1. Линейные пространства. Определение, аксиоматика, простейшие следствия, примеры линейных пространств.
2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Определения, 10 утверждений о линейно зависимых и линейно независимых системах.
3. Конечномерные линейные пространства. Понятие базиса линейного пространства. Утверждение о единственности разложения по базису. Понятие размерности линейного пространства.
4. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула для размерностей суммы и пересечения подпространств.
5. Линейные отображения (линейные операторы). Определение, операции с линейными отображениями ( умножение на число, сумма, произведение), примеры линейных отображений. Ядро и область значений линейного оператора. Соотношение между размерностями ядра, области определения и области значений.
6. Изоморфизмы линейных пространств. Определение, основные свойства, примеры. Критерий изоморфности линейных пространств.
7. Изображающая матрица линейного оператора в паре базисов. Определение, свойства, примеры.
8. Замена базиса в линейном пространстве. Оператор и матрица замены базиса. Невырожденность матрицы замены базиса. Преобразование координат вектора и изображающей матрицы оператора при замене базиса.
9. Собственные значения матриц и операторов. Характеристический полином матриц и операторов. Алгебраическая кратность собственных чисел.
10. Собственные вектора матриц и операторов. Собственные вектора и собственные подпространства матриц и операторов. Геометрическая кратность собственных значений. Соотношение алгебраической и геометрической кратностей.
11. Линейная независимость собственных векторов оператора, отвечающих различным собственным значениям.
12. Постановка задачи о диагонализации матриц и операторов.

**Вышеуказанный материал выносится на коллоквиум во втором семестре.**

### **Евклидовы пространства. Квадратичные формы.**

1. Евклидовы пространства. Определение скалярного произведения в вещественном и комплексном линейном пространстве. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Норма вектора. Примеры. Ортогональность. Ортогональность векторов и множеств. Ортогональное дополнение. Ортогональные системы. Ортогональные и ортонормированные системы. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Процедура канонической ортогонализации. Существование ортонормированного базиса конечномерного евклидова пространства. Теорема

Пифагора. Утверждения о разложении вектора по ортонормированному базису и о выражении скалярного произведения векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Теорема о проекции .

2. Унитарные и ортогональные матрицы. Критерий унитарности. Унитарность произведения унитарных матриц; унитарность матрицы, обратной к унитарной (групповое свойство). Унитарность матрицы замены одного ортонормированного базиса на другой.

3. Эрмитовы матрицы. Вещественность спектра эрмитовой матрицы. Эрмитовость матрицы, унитарно эквивалентной эрмитовой.

4. Сопряженный оператор. Определение. Ядро сопряженного оператора. Самосопряженные операторы Вещественность спектра, ортогональность собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Теорема о диагонализуемости самосопряженного оператора. Нормальные операторы. Теорема о диагонализации нормального оператора.

5. Квадратичные формы в  $\mathbb{R}^n$ . Определение формы, матрица формы, преобразование матрицы формы при замене базиса. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Сигнатура квадратичной формы. Закон инерции. Классификация квадратичных форм.

6. Анализ уравнения второго порядка в  $\mathbb{R}^3$ . Виды поверхностей 2 порядка. Линейчатые поверхности второго порядка.

### **Каноническая жорданова форма матриц и операторов**

1. Действия с матрицами, разбитыми на клетки. Блочнo-диагональные матрицы.
2. Схема приведения матриц и операторов к жордановой форме. Присоединенные вектора, канонические цепочки, жордановы клетки.
3. Функциональное исчисление матриц и операторов. Функция от жордановой клетки, вычисление функции от произвольной матрицы. Группа экспонент, порожденная матрицей. Применение к решению систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

### **Темы экзаменационных задач.**

1. Вычисление векторного произведения векторов.
2. Нахождение на плоскости прямой, проходящей через заданную точку на заданном расстоянии от второй заданной точки.
3. нахождение плоскости, проходящей через две заданные точки.
4. Построение общего перпендикуляра к паре скрещивающихся прямых в пространстве.
5. Вычисление произведения заданных матриц.
6. Нахождение перестановки, обратной к заданной.
7. Вычисление матрицы, обратной к заданной, методом Гаусса.
8. Решение системы линейных уравнений общего вида.

9. Нахождение размерности и базиса двух заданных подпространств пространства столбцов, а также их суммы и пересечения.
10. Диагонализация заданной матрицы.
11. Определение ортогональной проекции заданного вектора на заданное подпространство.
12. Приведение заданной квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и ортогональным преобразованием.
13. Приведение заданной матрицы к Жордановой форме.

### **3.2. Примерный план практических занятий**

#### **1-й семестр (15 занятий)**

**Занятие 1:** Вектора на плоскости и в пространстве. Скалярное произведение.  
Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 1021—1027, 1034,1036,1037,1046—1051.

**Занятие 2:** Определители 2 и 3 порядка. Векторное и смешанное произведение векторов.

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 1074—1080, 1083—1086.

**Занятие 3:** Прямая линия на плоскости

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 201—203,216,245,259,261,263

**Занятие 4:** Плоскость в пространстве

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 757,771,772,777,787,794.

**Занятие 5:** Прямая линия в пространстве. Нахождение канонического уравнения прямой линии, заданной в виде пересечения двух плоскостей.

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 819,841,839,837,851,853.

**Занятие 6:** Эллипс и гипербола. Касательные к эллипсу и гиперболе.

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 375,383,385,411,412,433,439,457,458.

**Занятие 7:** Парабола. Касательные к параболе.

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 480,497,498,500.

**Занятие 8:** Преобразование координат на плоскости. Преобразование общего уравнения второго порядка на плоскости и построение кривой, заданной уравнением общего вида.

Рекомендуемые задачи: Цубербиллер, 618,672.

**Занятие 9:** контрольная работа по аналитической геометрии.

**Занятие 10:** Матрицы и действия над ними.

Рекомендуемые задачи: Фаддеев, Соминский (ФС), 220—223. Задачи 225,226 — обязательно!

**Занятие 11:** Определители. Нахождение определителей методом Гаусса.

Рекомендуемые задачи: ФС 275—281,306—308, определитель Вандермонда.

**Занятие 12:** Крамеровы системы. Нахождение обратной матрицы методом Гаусса.

Рекомендуемые задачи: ФС 400,410,411,413



**Занятие 13:** Линейная зависимость и линейная независимость строк и столбцов. Ранг матрицы. Решение линейных систем общего вида.

Рекомендуемые задачи: ФС 442, 443.

**Занятие 14.** Контрольная работа по темам «Алгебра матриц, системы линейных алгебраических уравнений» (2 часа).

**Занятие 15. Зачет.** Переписывание контрольных работ и получение зачета.

## 2-семестр (всего 15 занятий)

**Занятие 1:** Линейные пространства, базисы. Размерность и базис линейной оболочки. Размерность и базис пространства решений однородной линейной системы. Рекомендуемые задачи: (Фаддеев, Соминский) 928,929,933,443.

**Занятие 2:** Сумма и пересечение подпространств. Размерность и базис суммы и пересечения.

Рекомендуемые задачи: 934,935.

**Занятие 3:** Линейные операторы. Понятие изображающей матрицы линейного оператора.

Рекомендуемые задачи: ?. Типовые задачи — изображающая матрица оператора дифференцирования в пространстве полиномов, изображающая матрица оператора умножения на матрицу в пространстве матриц, изображающая матрица оператора в случае, когда заданы образы элементов некоторого базиса под действием данного оператора.

**Занятие 4:** Преобразования координат вектора и матрицы оператора при замене базиса. Рекомендуемые задачи: 936,937.

**Занятия 5,6:** Характеристический полином. Собственные числа и собственные вектора матриц. Диагонализуемые матрицы.

Рекомендуемые задачи: 1032, 1047 — диагонализуемая часть.

**Занятие 7:** Эвклидовы пространства. Ортогональность. Ортогонализация.

Рекомендуемые задачи: 1085 — 1088, 1091, 1094.

**Занятия 8,9:** Ортогональные преобразования. Диагонализация симметричных вещественных матриц ортогональным преобразованием. Диагонализация эрмитовых матриц унитарным преобразованием.

Рекомендуемые задачи: матрицы форм 535.

**Занятия 10,11:** Вещественные квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду способом Лагранжа и ортогональным преобразованием.

Рекомендуемые задачи: 527,535.

**Занятие 12:** Анализ уравнения второго порядка на плоскости и в пространстве. Классификация поверхностей второго порядка.

Рекомендуемые задачи: 545.

**Занятие 13,14:** Приведение матриц к канонической жордановой форме. Вычисление функции от матрицы.

Рекомендуемые задачи: 1047

**Занятие 15:** контрольная работа по материалу семестра.

## 4. Вопросы к экзаменам и коллоквиумам

### 4.1 Примерный перечень вопросов к осеннему коллоквиуму.

- 1 Векторы на плоскости и в пространстве. ( Понятие вектора, действия с векторами, проекция вектора на ось, координаты вектора.)
- 2 Скалярное произведение векторов. ( Определение, свойства, выражение через координаты сомножителей.)
- 3 Определители второго и третьего порядка. ( Определение, основные свойства — линейность по строкам и столбцам, поведение при перестановках строк и столбцов, разложение по строкам и столбцам.)
- 4 Ориентация векторов на плоскости и в пространстве.
- 5 Векторное произведение пространственных векторов. ( Определение, свойства — до линейности.)
- 6 Смешанное произведение трех пространственных векторов. ( Определение, свойства, геометрический смысл смешанного произведения как ориентированного объема.)
- 7 Линейность векторного и смешанного произведений. Формулы в виде определителей.
- 8 Двойное векторное произведение. Формула для двойного векторного произведения.
- 9 Прямая линия на плоскости. ( Определение, различные виды уравнения — параметрическое, общее, в отрезках, с угловым коэффициентом, нормальное.)
- 10 Расстояние от точки до прямой. ( Формула. Уравнения биссектрис углов между двумя прямыми.)
- 11 Две прямые на плоскости. ( Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.)
- 12 Пучок прямых на плоскости. ( Уравнение пучка прямых, проходящих через заданную точку и через точку пересечения двух заданных прямых.)
- 13 Плоскость в пространстве. ( Определение, различные виды уравнения плоскости — общее, в отрезках, нормальное, через три заданные точки.)
- 14 Расстояние от точки до плоскости в пространстве.
- 15 Пучок плоскостей в пространстве. ( Уравнение пучка, проходящего через линию пересечения двух заданных плоскостей.)

- 16 Прямая линия в пространстве. ( Определение, векторное и параметрическое уравнение, каноническая система.)
- 17 Прямая линия как пересечение двух плоскостей.
- 18 Эллипс. (Определение, уравнения (каноническое, параметрическое, в фокальной полярной системе координат), основные свойства. Соприкосновение прямой и эллипса. Уравнение касательной к эллипсу, проведенной в данной его точке .Оптическое свойство.)
- 19 Гипербола. ( Определение, уравнения (каноническое, параметрическое, в фокальной полярной системе координат), основные свойства. Асимптоты гиперболы. Соприкосновение прямой и гиперболы. Уравнение касательной к гиперболе, проведенной в данной ее точке. Оптическое свойство.)
- 20 Парабола. ( Определение, уравнение, основные свойства. Соприкосновение прямой и параболы. Уравнение касательной к параболе, проведенной в данной ее точке. Оптическое свойство параболы.)
- 21 Преобразования координат на плоскости — сдвиги, отражения, повороты.
- 22 Анализ общего уравнения второго порядка на плоскости.

#### **4.2 Примерный перечень вопросов к экзамену в первом семестре**

- 1 Матрицы, действия над ними. Сложение матриц, умножение матриц на число, произведение матриц. Ассоциативность произведения матриц. Выражение строк и столбцов произведения матриц через строки и столбцы сомножителей.
- 2 Матрицы, действия над ними. Транспонирование матриц. Транспонирование произведения матриц.
- 3 Перестановки. Понятие перестановки. Беспорядки, четность (знак) перестановки. Изменение четности перестановки при транспозициях (инверсиях) элементов. Обратная перестановка, четность обратной перестановки. Полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon$ .
- 4 Определители. Определение определителя. Линейность определителя по строке (столбцу).
- 5 Определители. Определение определителя. Смена знака определителя при перестановке его строк (столбцов) местами. Значение определителя, составленного из строк (столбцов) исходной матрицы в произвольном порядке.
- 6 Определители. Определитель транспонированной матрицы.
- 7 Определители. Определитель произведения матриц.
- 8 Разложение определителя по строке (столбцу). Миноры и алгебраические дополнения.
- 9 Обратная матрица. Определение правой и левой обратных матриц. Понятие матрицы, обратной к квадратной. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Присоединенная матрица. Формула для элементов обратной матрицы.
- 10 Системы линейных алгебраических уравнений крамеровского типа. Запись системы уравнений в матричных терминах и с помощью расширенной матрицы. Существование и единственность решения крамеровской системы. Формулы Крамера.
- 11 Метод Гаусса для вычисления определителей, решения крамеровских систем и обращения матриц. Эквивалентные преобразования систем, реализация прямого и обратного хода метода Гаусса.

- 12 Координатные пространства строк и столбцов. Линейная зависимость и линейная независимость систем строк (столбцов). 10 утверждений о линейной зависимости и независимости систем. Понятие максимальной линейно независимой подсистемы.
- 13 Ранг матрицы. Определение ранга матрицы по строкам, столбцам и минорам. Лемма о базовом миноре. Теорема о ранге. Действия со строками и столбцами матриц, сохраняющие ранг.
- 14 Системы линейных уравнений общего вида. Однородные и неоднородные системы. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости неоднородной системы.
- 15 Системы линейных уравнений общего вида. Свободные и зависимые переменные. Построение частного решения неоднородной системы и общего решения однородной системы.
- 16 Линейные пространства. Определение, аксиоматика, простейшие следствия, примеры линейных пространств.
- 17 Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Определения, 10 утверждений о линейно зависимых и линейно независимых системах.

### **4.3 Примерный перечень вопросов к весеннему коллоквиуму**

- 1 Конечномерные линейные пространства. Понятие базиса линейного пространства. Утверждение о единственности разложения по базису.
- 2 Конечномерные линейные пространства. Понятие размерности линейного пространства.
- 3 Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Формула для размерностей суммы и пересечения подпространств.
- 4 Линейные отображения (линейные операторы). Определение, операции с линейными отображениями ( умножение на число, сумма, произведение), примеры линейных отображений.
- 5 Линейные отображения (линейные операторы). Ядро и область значений линейного оператора. Соотношение между размерностями ядра, области определения и области значений.
- 6 Изоморфизмы линейных пространств. Определение, основные свойства, примеры. Критерий изоморфности линейных пространств.
- 7 Изображающая матрица линейного оператора в паре базисов. Определение, свойства, примеры.
- 8 Замена базиса в линейном пространстве. Оператор и матрица замены базиса. Невырожденность матрицы замены базиса. Преобразование координат вектора и изображающей матрицы оператора при замене базиса.
- 9 Собственные значения матриц и операторов. Характеристический полином матриц и операторов. Алгебраическая кратность собственных чисел.
- 10 Собственные вектора матриц и операторов. Собственные вектора и собственные подпространства матриц и операторов. Геометрическая кратность собственных значений. Соотношение алгебраической и геометрической кратностей.

11 Линейная независимость собственных векторов оператора, отвечающих различным собственным значениям.

12 Постановка задачи о диагонализации матриц и операторов.

#### 4.4 Примерный перечень вопросов к экзамену во втором семестре.

1 Евклидовы пространства. Определение скалярного произведения в вещественном и комплексном линейном пространстве. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Норма вектора. Примеры.

2 Ортогональность. Ортогональность векторов и множеств. Ортогональное дополнение.

3 Ортогональные системы. Ортогональные и ортонормированные системы. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Процедура канонической ортогонализации. Существование ортонормированного базиса конечномерного евклидова пространства.

4 Теорема Пифагора. Утверждения о разложении вектора по ортонормированному базису и о выражении скалярного произведения векторов через их координаты в ортонормированном базисе.

5 Теорема о проекции.

6 Унитарные и ортогональные матрицы. Критерий унитарности. Унитарность произведения унитарных матриц; унитарность матрицы, обратной к унитарной (групповое свойство). Унитарность матрицы замены одного ортонормированного базиса на другой.

7 Эрмитовы матрицы. Вещественность спектра эрмитовой матрицы. Эрмитовость матрицы, унитарно эквивалентной эрмитовой.

8 Сопряженный оператор. Определение. Ядро сопряженного оператора.

9 Самосопряженные операторы. Вещественность спектра, ортогональность собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Теорема о диагонализуемости самосопряженного оператора.

10 Нормальные операторы. Теорема о диагонализации нормального оператора.

11 Квадратичные формы в  $\mathbb{R}^n$ . Определение формы, матрица формы, преобразование матрицы формы при замене базиса.

12 Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

13 Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.

14 Сигнатура квадратичной формы. Закон инерции. Классификация квадратичных форм.

15 Анализ уравнения второго порядка в  $\mathbb{R}^3$ . Виды поверхностей 2 порядка. Линейчатые поверхности второго порядка.

16 Действия с матрицами, разбитыми на клетки. Блочнo-диагональные матрицы.

17 Схема приведения матриц и операторов к жордановой форме. Присоединенные вектора, канонические цепочки, жордановы клетки.

18 Функциональное исчисление матриц и операторов. Функция от жордановой клетки, вычисление функции от произвольной матрицы.

19 Группа экспонент, порожденная матрицей. Применение к решению систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

### **4.3. Вопросы, выносимые на итоговый государственный экзамен** (только для направления 010600 «Прикладные математика и физика»)

1. Скалярное и векторное произведения векторов в трехмерном пространстве.
2. Классификация кривых второго порядка на плоскости.
3. Оптические свойства кривых второго порядка.
4. Определитель матрицы, его свойства.
5. Обратная матрица.
6. Системы линейных алгебраических уравнений. Структура общего решения. Системы с квадратной матрицей, альтернатива Фредгольма. Условия разрешимости.
7. Линейные пространства. Линейная независимость, базис, координаты вектора, размерность.
8. Собственные значения оператора, собственные векторы. Характеристический многочлен.
9. Евклидово пространство. Скалярное произведение. Неравенства Коши и треугольника.
10. Самосопряженные операторы. Свойства собственных чисел и собственных векторов. Базис собственных векторов (без доказательства).

## **5. Литература**

### **5.1. Основная**

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия: Учебник. – 36 изд. СПб.: Лань, 2007. – 300 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учебник. – 6 изд. М.: Наука. Физматлит, 2003. – 240 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник. – 6 изд. М.: Физматлит, 2005. – 278 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т.: учебник. Т. III, часть 1. – 11 изд. – 2010. 394 с.
5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии: учебное пособие. – 34 изд. – СПб.: Лань, 2009. – 336 с.
6. Фаддеев Д. К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: Учебное пособие. – 16 изд. – СПб.: Лань, 2007. – 288 с.

### **5.2. Дополнительная**

7. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: учебное пособие. – 3 изд. – СПб.: Лань, 2004.
8. Булдырев В. С., Павлов Б. С. Линейная алгебра. Функции многих переменных. –Л.: Изд-во ЛГУ. – 1985.

### Раздел 3. Процедура разработки и утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Разработчик(и) рабочей программы учебной дисциплины

| Фамилия, имя, отчество    | Учёная степень | Учёное звание | Должность | Контактная информация (служебный адрес электронной почты, служебный телефон) |
|---------------------------|----------------|---------------|-----------|--|
| Фаддеев Михаил Михайлович | к.ф.-м.н       | доцент        | доцент    |  |
|                           |                |               |           |  |

В соответствии с порядком организации внутренней и внешней экспертизы образовательных программ, установленных приказом первого проректора по учебной работе от 18.02.2009 № 195/1, проведена двухуровневая экспертиза:

| первый уровень<br>(оценка качества содержания программы и применяемых педагогических технологий) |                       |                  |
|--|-----------------------|------------------|
| Наименование кафедры   | Дата заседания        | № протокола      |
| Кафедра Высшей математики и математической физики  | 06.10.2010            | № 2              |
| Кафедра Физики полимеров   | 20.10.2010            | № 4              |
| второй уровень<br>(соответствие целям подготовки и учебному плану образовательной программы)     |                       |                  |
| Экспертиза второго уровня выполнена в порядке, установленном приказом                            |                       |                  |
| <i>должностное лицо</i>  | <i>дата приказа</i>   | <i>№ приказа</i> |
| Уполномоченный орган (должностное лицо)  | Дата принятия решения | № документа      |
| Методическая комиссия  | 22.10.2010            | протокол №3      |

Иные документы об оценке качества рабочей программы учебной дисциплины

| Документ об оценке качества | Дата документа | № документа |
|-----------------------------|----------------|-------------|
|                             |                |             |
|                             |                |             |

Утверждение рабочей программы учебной дисциплины

| Уполномоченный орган (должностное лицо) | Дата принятия решения | № документа |
|---|-----------------------|-------------|
| Ученый Совет физического факультета     | 26.10.2010            | №3          |

Внесение изменений в рабочую программу учебной дисциплины

| Уполномоченный орган (должностное лицо) | Дата принятия решения | № документа |
|---|-----------------------|-------------|
|   |                       |             |
|   |                       |             |