

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет

Регистрационный номер  
рабочей программы учебной дисциплины:

10 / Ф3 / 9.2

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ  
*Математический анализ (основной поток).*

**основных образовательных программ высшего профессионального образования**

*Прикладные математика и физика, Физика, Радиофизика*

подготовки по направлению **010600** *Прикладные математика и физика*

**010700** *Физика*

**010800** *Радиофизика*

по профилю

*по всем профилям*

для получения квалификации (степени)

*бакалавр*

*Рабочая программа учебной дисциплины может использоваться при совпадении значения трудоёмкости в зачётных единицах в одной или нескольких основных и дополнительных образовательных программах, характеристики которых указываются на титульном листе*

виды промежуточной аттестации:	Зачётов	2	<b>форма обучения</b>	<i>очная.</i>
			экзаменов	2

Трудоёмкость учебной дисциплины 14 зачётных единиц

Санкт-Петербург  
2010

## 1. Организационно-методический раздел

**1.1. Цель изучения дисциплины:** обучение студентов первого курса физического факультета методам математического анализа; формирование у студентов логического мышления; подготовка к восприятию других математических и физических дисциплин.

**1.2. Задачи курса:** изучение основных разделов математического анализа, развитие навыков самостоятельного решения практических задач; обеспечение базы для усвоения приближенных методов вычислений и соответствующих компьютерных программ.

**1.3. Место курса в профессиональной подготовке выпускника:** дисциплина «Математический анализ» является общеобразовательной базовой дисциплиной в подготовке профессионального физика и служит основой для изучения других математических, физических и вычислительных дисциплин.

**1.4. Требования к уровню освоения дисциплины «Математический анализ»**

- знать содержание курса "Математический анализ"
- иметь достаточно полное представление о возможностях применения разделов курса в различных математических и физических задачах
- иметь достаточные практические навыки по решению задач по математическому анализу

### **2. Объем дисциплины, виды учебной работы, форма текущего, промежуточного и итогового контроля**

Время чтения лекций по дисциплине	1-2 семестр
Примерное число студентов	90 студентов
Всего аудиторных занятий	195 часов
Из них лекций	90 часов
Практические занятия	105 часов
Самостоятельная работа студентов	145 часов
Итого (трудоемкость дисциплины)	340 часов
Текущий контроль	Контрольные работы, коллоквиумы – один в первом и один во втором семестре, в сроки, предусмотренные учебным планом
Промежуточный контроль	Зачеты по практическим занятиям в первом и втором семестрах, два экзамена – в первом семестре и во втором семестре. Результаты коллоквиумов учитываются на экзаменах в соответствии с правилами, приведенными ниже.
Итоговый контроль	Для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и физика», предусмотрен государственный экзамен по математике. Вопросы курса «Высшая алгебра», выносимые на итоговый государственный экзамен, приведены в п.4.5.

## **Правила проведения коллоквиума и учета результатов сдачи на экзамене.**

1. Коллоквиум и экзамен проводятся в письменной форме. Вопросы, выносимые на коллоквиумы и экзамены, указаны в разделе 4. Время работы составляет 90 минут.
2. Студенты, не сдавшие (не сдававшие) коллоквиум, сдают материал коллоквиума на экзамене соответствующего семестра. Между написанием работы по материалам коллоквиума и экзамена студентам предоставляется перерыв не менее 15 минут. Студенты, сдавшие коллоквиум, на экзамене пишут только работу по материалу экзамена. В отдельных случаях допускается передача коллоквиума с положительной оценки в день экзамена.
3. Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации на коллоквиумах и экзаменах категорически запрещено.
4. Билет коллоквиума или экзамена состоит из теоретической и практической частей. Теоретическая часть состоит из двух определений или формулировок согласно списку вопросов и одного или двух вопросов для подробного изложения. Практическая часть состоит из четырех типовых задач согласно плану практических занятий и тем экзаменационных задач.
5. Оценка удовлетворительно ставится за правильные определения и не менее чем две решенные задачи. Оценка хорошо ставится за изложенный (возможно, без доказательств) теоретический материал билета и не менее чем три решенные задачи. Оценка отлично ставится за полностью раскрытый теоретический материал и полностью решенные задачи. В болонской шкале оценка может быть скорректирована в ту или иную сторону с учетом малозначительных погрешностей изложения или, напротив, углубленного изложения материала.
6. Итоговая оценка на экзамене определяется как среднее арифметическое оценок за коллоквиум и экзамен с округлением в пользу экзаменационной оценки при условии, что обе эти оценки не ниже 2 баллов в болонской шкале. Неудовлетворительное написание любой из частей экзамена влечет за собой неудовлетворительную итоговую оценку.

## **3. Содержание дисциплины**

### **3.1. Темы лекций по дисциплине:**

**1-й семестр (всего 45 часов, в середине семестра коллоквиум и в конце семестра экзамен)**

#### **Элементы теории множеств. Вещественные и комплексные числа.**

1. Множества, операции над ними (объединение, пересечение, разность, произведение). Отображения множеств. Конечные, счетные и несчетные множества. Примеры.
2. Рациональные числа, их свойства. Вещественные числа. Точная верхняя и точная нижняя границы. Определение, свойства, примеры, теорема существования.
3. Комплексные числа, операции над ними. Алгебраическая форма комплексного числа.

Комплексное сопряжение. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корня степени  $n$  из комплексного числа. Комплексная экспонента, ее свойства. Комплексный логарифм. Определение степенного выражения с комплексными основанием и показателем. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента, их свойства.

4. Полиномы, их свойства. Степень полинома. Теорема Безу. Основная теорема высшей алгебры. Разложение полинома на множители.

### **Теория пределов. Непрерывные функции.**

5. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. О-символика. Примеры. Единственность предела. Предельный переход в неравенствах. Принцип сжатой переменной. Предел суммы, произведения, частного. Подпоследовательность. Предел подпоследовательности. Достаточное условие существования предела. Лемма о вложенных промежутках. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Сходимость в себе. Критерий Коши сходимости последовательности.

6. Определения предела функции на языке "эпсилон-дельта" и на языке последовательностей. Доказательство эквивалентности определений. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы. Критерий Коши существования предела функции. Число  $e$ .

7. Непрерывность функции. Непрерывность слева и справа. Суперпозиция двух функций. Непрерывность суперпозиции. Классификация разрывов функции. Примеры. Теорема Больцано-Коши I (достаточное условие существования корня непрерывной функции). Теорема Больцано-Коши II (о промежуточных значениях непрерывной функции). Теорема Вейерштрасса I (об ограниченности непрерывной функции). Теорема Вейерштрасса II (о максимуме и минимуме непрерывной функции).

8. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора. Модуль непрерывности, его свойства. Примеры.

9. Теорема об обратной функции.

10. Основные пределы.

**Указанный материал выносится на коллоквиум в осеннем семестре.**

### **Дифференциальное исчисление.**

11. Понятие производной. Эквивалентные определения производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы. Инвариантность формы первого дифференциала. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа, следствия из нее. Оценка модуля непрерывности дифференцируемой функции. Теорема Коши.

12. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа. Формулы Маклорена для

$\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $(1+x)^m$ ,  $\ln(1+x)$ . Признаки возрастания и убывания функции. Локальные экстремумы функций. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Правило Лопиталья.

13. Первообразная. Неопределенный интеграл. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.

14. Интегральные суммы. Суммы Дарбу, их свойства. Понятие определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости. Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции. Геометрический смысл определенного интеграла. Интегрируемость непрерывных функций. Свойства определенного интеграла от непрерывной функции (линейность, аддитивность). Интегрирование неравенств. Первая теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Ньютона - Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Вторая теорема о среднем (формула Бонне). Классы интегрируемых функций. Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора. Формы Лагранжа и Коши.

15. Гладкая кривая на плоскости. Касательный вектор. Длина дуги кривой. Естественная параметризация кривой. Кривизна.

**В конце первого семестра проводится экзамен.**

**2-й семестр (всего 45 часов, в середине семестра коллоквиум и в конце семестра экзамен)**

### **Интегрирование рациональных функций.**

1. Кратные корни полинома. Разложение полиномов в произведение линейных и квадратичных сомножителей. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. Формула Остроградского.

### **Ряды и несобственные интегралы.**

2. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку. Критерий Коши сходимости. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов. Признак сравнения сходимости несобственного интеграла по бесконечному интервалу. Эквивалентность функций и сходимость несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла по бесконечному промежутку. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Критерий Коши сходимости. Признак сравнения. Эквивалентность функций и сходимость несобственных интегралов. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов. Несобственные интегралы в смысле главного значения. Примеры.

3 Бесконечные ряды. Основные свойства. Примеры сходящихся и расходящихся рядов. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Ряды с положительными членами. Признак сравнения. Эквивалентность последовательностей и сходимость рядов. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Признак Коши. Интегральный признак Коши. Сходимость обобщенного гармонического

ряда. Обобщенный признак Даламбера. Признак Куммера. Признаки Раабе, Бертрана и Гаусса сходимости рядов.

4. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка суммирования. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов. Ряды с комплексными членами.

**Вышеуказанный материал выносится на коллоквиум во втором семестре.**

### **Функциональные последовательности и ряды.**

5. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость, критерий Коши равномерной сходимости. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся последовательностей. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (суммы равномерно сходящегося ряда). Переход к пределу под знаком интеграла. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

6. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.

7. Степенные ряды. Теорема Абеля I. Радиус сходимости. Теорема Абеля II о равномерной сходимости степенного ряда. Сохранение радиуса сходимости при интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Разложение в степенной ряд гладкой функции (анализ поведения остаточного члена формулы Тейлора). Разложение в степенные ряды  $\sin x, \cos x, e^x, (1+x), \arctg x, (1+x)^m$ .

### **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.**

8. Пространство  $R^d$ . Сходимость последовательностей. Эквивалентность сходимости и по координатной сходимости. . Окрестность точки. Предельные точки множества. Замкнутые множества, открытые множества, связь между ними. Примеры. Предел функции нескольких переменных. Двойные и повторные пределы. Непрерывность функции нескольких переменных. Свойства непрерывных функций ( теоремы Вейерштрасса, Кантора, Больцано-Коши).

9. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Частные производные. Первый дифференциал функции нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцирование сложной функции. Матрица Якоби. Теорема об обратной функции (без доказательства). Теорема о неявной функции. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент.

10. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости значения смешанной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

### **Интегралы, зависящие от параметра.**

11. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность интеграла по параметру. Дифференцирование и интегрирование собственного интеграла по параметру.
12. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости (критерий Коши).
13. Непрерывность несобственного интеграла по параметру. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.
14. Признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла. Интеграл Дирихле.

#### **Темы экзаменационных задач.**

1. Действия с комплексными числами.
2. Вычисление пределов последовательностей и функций.
3. Вычисление производных.
4. Вычисление первообразных: замены переменных, интегрирование по частям.
5. Интегрирование рациональных функций.
6. Анализ сходимости числовых рядов и несобственных интегралов.
7. Разложение функций в степенные ряды.
8. Дифференцирование функций нескольких переменных.
9. Нахождение экстремумов функции нескольких переменных.
10. Дифференцирование интегралов по параметру.

### **3.2. Примерный план практических занятий**

#### **1-й семестр (30 занятий по 2 часа)**

**Занятие 1:** Метод математической индукции.

Рекомендуемые задачи: Демидович (Сборник задач и упражнений по математическому анализу), 1 - 10.

**Занятие 2:** Основные понятия комбинаторики: факториал, число размещений, число сочетаний. Треугольник Паскаля, формула бинома Ньютона.

Рекомендуемые задачи: см. методичку. Типовая задача: определить коэффициент при  $x^4$  полинома  $(1 - 2x)^3(1 + x)^6$ .

**Занятие 3:** Комплексные числа - алгебраическая форма. Арифметические действия с комплексными числами.

Рекомендуемые задачи: ФС (Д.К.Фаддеев, И.С.Соминский, сборник задач по высшей алгебре), 101 - 113.

**Занятие 4:** Комплексные числа - тригонометрическая форма. Возведение в степень и извлечение корня. Геометрическое изображение комплексного числа.

Рекомендуемые задачи: ФС, 118 - 123, 135 - 145.

**Занятие 5:** Тригонометрические формулы. Элементарные функции комплексного аргумента.

Рекомендуемые задачи: ФС, 146 - 150, 157, 158, 209 - 213.

**Занятие 6:** Предел числовой последовательности : определение.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 46 - 50, 58 - 66.

**Занятие 7:** Предел монотонной последовательности. Число  $e$ . Критерий Коши существования предела.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 69, 72, 74, 75, 77 - 85.

**Занятие 8:** контрольная работа №1: комплексные числа и предел числовой последовательности. (Естественно одновременное проведение с контрольными работами по аналитической геометрии и алгебре.)

**Занятие 9:** Предел функции: определение. Бесконечные пределы.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 401 - 410.

**Занятие 10:**  $O$ -символика. Раскрытие неопределенностей - алгебраические функции.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 647, 648, 411 - 428, 435 - 454.

**Занятие 11:** Раскрытие неопределенностей - трансцендентные функции.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 474- 480, 504 - 513, 535 - 545.

**Занятие 12:** Непрерывность функций. Разрывы.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 675 - 686, 687 - 700.

**Занятие 13:** Равномерная непрерывность. Модуль непрерывности.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 794 - 800, 802.

**Занятие 14:** контрольная работа №2: функциональные пределы и раскрытие неопределенностей. **Эта контрольная работа должна быть проведена до коллоквиума.**

**Занятие 15:** Определение производной, правила дифференцирования.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 845 - 971. Рекомендуется дать каждому студенту специальное (индивидуальное) жестко проверяемое домашнее задание на 15-25 примеров.

**Занятие 16:** Производная параметрически заданной функции. Производные высших порядков. Формула Лейбница.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1039 - 1046, 1140 - 1143, 1156 - 1165.

**Занятие 17:** Признаки возрастания и убывания функций. Неравенства.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1268 - 1272, 1289 - 1291, 1296.

**Занятие 18:** Направление вогнутости. Точки перегиба. Неравенства. Асимптоты.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1299 - 1307, 1314, 1373.2

**Занятие 19:** Построение графиков функций по характерным точкам.



Рекомендуемые задачи: Демидович, 1471 - 1480, 1494, 1505 - 1510, 1521.

**Занятие 20:** Построение графиков параметрически заданных функций.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1532, 1534, 1538, 1541

**Занятие 21:** контрольная работа №3: дифференцирование функций, построение графиков.

**Занятие 22:** Формула Тейлора.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1380 - 1387.

**Занятие 23:** Раскрытие неопределенностей по правилам Лопиталю и с использованием формулы Тейлора.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1398 - 1406.3

**Занятие 24:** Понятие кривизны кривой. Радиус и центр кривизны.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1596 - 1609.

**Занятие 25:** Неопределенный интеграл: табличные интегралы.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1628 - 1648.

**Занятие 26:** Неопределенный интеграл: замена переменной.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1766 - 1790.

**Занятие 27:** Неопределенный интеграл: интегрирование по частям.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1791 - 1810.

**Занятие 28:** Примеры вычисления определенных интегралов - немного, для экзамена, в основном это следующий семестр.

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2206 - 2216.

**Занятие 29:** контрольная работа №4: формула Тейлора, простейшие приемы интегрирования.

**Занятие 30:** переписывания контрольных и получение зачета.

**2-семестр** (всего 15 занятий по 3 часа)

**Занятия 1-3. Систематическое интегрирование.**

интегрирование рациональных функций (разложение на простейшие) — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1733 — 1740, 1866 — 1887

интегрирование рациональных функций (формула Остроградского) — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1891 — 1897

интегрирование рационально-тригонометрических функций — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1991 — 2003, 2025 — 2034

интегрирование дифференциальных биномов — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1981 — 1989

интегрирование линейных и дробно-линейных иррациональностей — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1926 — 1935

интегрирование квадратичных иррациональностей — 2 часа

Рекомендуемые задачи: Демидович, 1943 — 1950, 1952 — 1959, 1964, 1965

контрольная работа — 2 часа

#### **Занятия 4-5 Определенные интегралы и их приложения.**

примеры вычисления определенных интегралов — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2216, 2260, 2264, 2281 — 2286

вычисление площадей плоских фигур — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2396 — 2410, 2413, 2418, 2419, 2426

вычисление длин дуг кривых — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2431 — 2440

вычисление объемов (в т.ч. тел вращения) — 2 часа

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2462 — 2467, 2472 — 2481

вычисление площадей поверхностей вращения — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2491, 2495 — 2497

#### **Занятия 6-7. Несобственные интегралы и числовые ряды. Признаки сходимости .**

несобственные интегралы — 2 часа

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2358 — 2376, 2379 — 2382

ряды, признаки Даламбера и Коши — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2578 — 2584

ряды, признаки Гаусса и Раабе — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2598 — 2604

ряды, интегральный признак и анализ асимптотики общего члена ряда — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2616 — 2620, 2559 — 2564

знакопеременные ряды, признаки Лейбница, Абеля и Дирихле — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2659 — 2661, 2675 — 2680, 2698

#### **Занятие 8. Функциональные и степенные ряды.**

понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2747 — 2751, 2772 — 2774

степенные ряды, радиус сходимости — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2812 — 2820

ряды Тейлора — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 2851 — 2862

#### **Занятия 9-12. Функции многих переменных — 12 часов:**

непрерывность и дифференцируемость — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3194 — 3203, 3211, 3212

правила дифференцирования — 2 часа

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3213 — 3227, 3288 — 3300, 3383 — 3389, 3407 — 3410

преобразование дифференциальных выражений — 2 часа

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3431 — 3433, 3458 — 3467, 3470, 3511

касательная плоскость и нормаль к поверхности — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3539 — 3547

дифференциалы, формула Тейлора — 1 час

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3586, 3593 — 3600

экстремумы функций нескольких переменных — 3 часа

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3621 — 3625, 3632 — 3634, 3654 — 3661

контрольная работа — 2 часа

**Занятия 13,14.** Интегралы, зависящие от параметра

Рекомендуемые задачи: Демидович, 3785, 3789 — 3792, 3795, 3803 — 3805, 3812, 3830

**Занятие 15.** Переписывание контрольных работ, получение зачета.

#### **4. Вопросы к экзаменам и коллоквиумам**

##### **4.1 Примерный перечень вопросов к осеннему коллоквиуму.**

1. Множества, операции над ними

(объединение, пересечение, разность, произведение).

Отображения множеств.

2. Конечные, счетные и несчетные множества. Примеры.

3. Рациональные числа, их свойства. Вещественные числа.

4. Точная верхняя и точная нижняя границы. Определение, свойства, примеры, теорема существования.

5. Комплексные числа, операции над ними. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение.

6. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

7. Извлечение корня степени  $n$  из комплексного числа.

8. Комплексная экспонента, ее свойства.

9. Комплексный логарифм. Определение степенного выражения с комплексными основанием и показателем.

10. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента, их свойства.
11. Полиномы, их свойства. Степень полинома. Теорема Безу.
12. Основная теорема высшей алгебры. Разложение полинома на множители.
13. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства.
14. О-символика. Примеры.
15. Единственность предела. Предельный переход в неравенствах. Принцип сжатой переменной.
16. Предел суммы, произведения, частного.
17. Подпоследовательность. Предел подпоследовательности.
18. Достаточное условие существования предела.
19. Лемма о вложенных промежутках. Теорема Больцано - Вейерштрасса.
20. Сходимость в себе. Критерий Коши сходимости последовательности.
21. Определения предела функции на языке "эпсилон-дельта" и на языке последовательностей. Доказательство эквивалентности определений.
22. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы.
23. Критерий Коши существования предела функции.
24. Число  $e$ .
25. Непрерывность функции. Непрерывность слева и справа. Суперпозиция двух функций. Непрерывность суперпозиции.
26. Классификация разрывов функции. Примеры.
27. Теорема Больцано-Коши I (достаточное условие существования корня непрерывной функции).
28. Теорема Больцано-Коши II (о промежуточных значениях непрерывной функции).
29. Теорема Вейерштрасса I (об ограниченности непрерывной функции).
30. Теорема Вейерштрасса II (о максимуме и минимуме непрерывной функции).

31. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
32. Модуль непрерывности, его свойства. Примеры.
33. Теорема об обратной функции.
34. Основные пределы.

#### **4.2 Примерный перечень вопросов к экзамену в первом семестре**

1. Понятие производной. Эквивалентные определения производной. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
2. Дифференцирование суммы, произведения, частного.
3. Производная сложной функции.
4. Производная обратной функции.
5. Производная функции, заданной параметрически.
6. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
7. Дифференциалы. Инвариантность формы первого дифференциала.
8. Теорема Ферма.
9. Теорема Ролля.
10. Теорема Лагранжа, следствия из нее.
11. Оценка модуля непрерывности дифференцируемой функции.
12. Теорема Коши.
13. Формула Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.
14. Формулы Маклорена для  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ .
15. Формулы Маклорена для  $(1+x)^m$ ,  $\ln(1+x)$ .
16. Признаки возрастания и убывания функции.
17. Локальные экстремумы функций.
18. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
19. Правило Лопиталья.
20. Первообразная. Неопределенный интеграл.
21. Интегрирование по частям и замена переменной в неопределенном интеграле.
22. Интегральные суммы. Суммы Дарбу, их свойства.
23. Понятие определенного интеграла.
24. Необходимое условие интегрируемости.

25. Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции.
26. Геометрический смысл определенного интеграла. Интегрируемость непрерывных функций.
27. Свойства определенного интеграла от непрерывной функции (линейность, аддитивность).
28. Интегрирование неравенств.
29. Первая теорема о среднем.
30. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Ньютона - Лейбница.
31. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
32. Вторая теорема о среднем (формула Бонне).
33. Классы интегрируемых функций.
34. Интегральная форма остаточного члена в формуле Тейлора. Формы Лагранжа и Коши.
35. Гладкая кривая на плоскости. Касательный вектор. Длина дуги кривой.
36. Естественная параметризация кривой. Кривизна.

#### **4.3 Примерный перечень вопросов к весеннему коллоквиуму**

1. Кратные корни полинома. Разложение полиномов в произведение линейных и квадратичных сомножителей.
2. Разложение рациональной дроби на простейшие.
3. Интегрирование простейших дробей.
4. Формула Остроградского.
5. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку.
6. Критерий Коши сходимости. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
7. Признак сравнения сходимости несобственного интеграла по бесконечному интервалу. Эквивалентность функций и сходимости несобственных интегралов.
8. Абсолютная и условная сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку.
9. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственного интеграла.

10. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Критерий Коши сходимости. Признак сравнения. Эквивалентность

функций и сходимость несобственных интегралов. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.

11. Несобственные интегралы в смысле главного значения. Примеры.

12. Бесконечные ряды. Основные свойства.

Примеры сходящихся и расходящихся рядов.

13. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости ряда.

14. Ряды с положительными членами. Признак сравнения.

Эквивалентность последовательностей и сходимость рядов.

15. Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.

Признак Коши. Интегральный признак Коши.

16. Сходимость обобщенного гармонического ряда.

17. Обобщенный признак Даламбера. Признак Куммера.

18. Признаки Раабе, Бертрана и Гаусса сходимости рядов.

19. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

20. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка суммирования.

21. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.

22. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов. Примеры.

23. Ряды с комплексными членами.

#### **4.4 Примерный перечень вопросов к экзамену во втором семестре.**

1. Функциональные последовательности и ряды.

2. Равномерная сходимость, критерий Коши равномерной сходимости. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся последовательностей.

3. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций (суммы равномерно сходящегося ряда).

4. Переход к пределу под знаком интеграла. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов.

5. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.

6. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов.

7. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов (без доказательства).

8. Степенные ряды. Теорема Абеля I. Радиус сходимости.

9. Теорема Абеля II о равномерной сходимости степенного ряда.

10. Сохранение радиуса сходимости при интегрировании и дифференцировании степенного ряда.

11. Разложение в степенной ряд гладкой функции (анализ поведения остаточного члена формулы Тейлора).

12. Разложение в степенные ряды  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ .
13. Разложение в степенные ряды  $\ln(1+x)$ ,  $\arctg x$ ,  $(1+x)^m$
14. Пространство  $R^d$ . Сходимость последовательностей. Эквивалентность сходимости и покоординатной сходимости.
15. Окрестность точки. Предельные точки множества. Замкнутые множества, открытые множества, связь между ними. Примеры.
16. Предел функции нескольких переменных. Двойные и повторные пределы.
17. Непрерывность функции нескольких переменных. Свойства непрерывных функций (теоремы Вейерштрасса, Кантора, Больцано-Коши).
18. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
19. Частные производные. Первый дифференциал функции нескольких переменных.
20. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
21. Дифференцирование сложной функции.
22. Матрица Якоби. Теорема об обратной функции (без доказательства).
23. Теорема о неявной функции.
24. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
25. Производная по направлению. Градиент.
26. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости значения смешанной производной от порядка дифференцирования.
27. Дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных.
28. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
29. Экстремум функции нескольких переменных.
30. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
31. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность интеграла по параметру.
32. Дифференцирование и интегрирование собственного интеграла по параметру.
33. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости (критерий Коши).
34. Непрерывность несобственного интеграла по параметру.
35. Интегрирование несобственного интеграла по параметру.
36. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.
37. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла.
38. Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла (без доказательства). Интеграл Дирихле.

**4.5. Вопросы, выносимые на итоговый государственный экзамен**  
(только для направления 010600 «Прикладные математика и физика»)



1. Предел последовательности, его свойства. Критерий Коши.
2. Предел функции. Непрерывность.
3. Производная. Механическая и геометрическая интерпретации. Дифференцирование вектор-функций.
4. Производные высших порядков. Формула Тейлора.
5. Экстремумы и выпуклость функции одной переменной.
6. Определенный интеграл.
7. Свойства интеграла: интегрирование неравенств, теорема о среднем, замена переменной в определенном интеграле.
8. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям.
9. Сходящиеся ряды. Абсолютная сходимость. Примеры.
10. Признаки сходимости рядов: сравнения, Даламбера, Лейбница.
11. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Теорема Вейерштрасса.
12. Дифференцирование и частные производные функции нескольких переменных. Свойства смешанных производных. Формула Тейлора.
13. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие и достаточное условие экстремума.
14. Условный экстремум. Множители Лагранжа.

## 5. Литература

### 5.1. Основная

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т.: учебник. Т. 1. – 24 изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 615 с.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т.: учебник. Т. 2 – 24 изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 843 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 т.: учебник. Т. 1, 2, 3. – 8 изд. – М.: Физматлит, Лаборатория знаний, 2003.

### 5.2. Дополнительная

4. Рудин У. Основы математического анализа. – 4 изд. – СПб.: Лань, 2004. – 320 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: в 2 ч. Ч. 1,2. – 6 изд. – М., Физматлит, 2001.

### Раздел 3. Процедура разработки и утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Разработчик(и) рабочей программы учебной дисциплины

Фамилия, имя, отчество	Учёная степень	Учёное звание	Должность	Контактная информация (служебный адрес электронной почты, служебный телефон)
Смородина Наталья Васильевна	д.ф.-м.н		профессор	

В соответствии с порядком организации внутренней и внешней экспертизы образовательных программ, установленных приказом первого проректора по учебной работе от 18.02.2009 № 195/1, проведена двухуровневая экспертиза:

первый уровень (оценка качества содержания программы и применяемых педагогических технологий)		
Наименование кафедры	Дата заседания	№ протокола
Кафедра Высшей математики и математической физики	06.10.2010	№ 2
Кафедра Молекулярной спектроскопии	20.10.2010	№ 3
второй уровень (соответствие целям подготовки и учебному плану образовательной программы)		
Экспертиза второго уровня выполнена в порядке, установленном приказом		
<i>должностное лицо</i>	<i>дата приказа</i>	<i>№ приказа</i>
Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа
Методическая комиссия	22.10.2010	протокол №3

Иные документы об оценке качества рабочей программы учебной дисциплины

Документ об оценке качества	Дата документа	№ документа

Утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа
Ученый Совет физического факультета	26.10.2010	№3

Внесение изменений в рабочую программу учебной дисциплины

Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа