ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет

Регистрационный номер
рабочей программы учебной дисциплины:

10	/	*Ф3*	/	*22.2*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Высшая математика (основной поток).

основных образовательных программ высшего профессионального образования
Прикладные математика и физика, Физика, Радиофизика

подготовки по направлению **010600** *Прикладные математика и физика*
010700 *Физика*
010800 *Радиофизика*

по профилю *по всем профилям*

для получения квалификации (степени) *бакалавр*

Рабочая программа учебной дисциплины может использоваться при совпадении значения трудоёмкости в зачётных единицах в одной или нескольких основных и дополнительных образовательных программах, характеристики которых указываются на титульном листе

форма обучения *очная .*

виды промежуточной аттестации: **Зачётов** *2* **экзаменов** *2*

Трудоёмкость учебной дисциплины 14 **зачётных единиц**

Санкт-Петербург
2010

1.Организационно-методический раздел

1.1. Цель изучения дисциплины: формирование у студентов, обучающихся на физическом факультете, знаний, составляющих значительную часть базы физико-математического образования – интегрирование в многомерных пространствах, дифференциальные уравнения, анализ Фурье и вариационное исчисление. Научить использовать упомянутые методы высшей математики в различных естественнонаучных областях.

1.2. Задачи курса: знакомство с общими теоретическими положениями, изучение методов и приобретение практических навыков решения стандартных задач по следующим разделам Высшей математики: кратные и поверхностные интегралы, векторный анализ, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнениями в частных производных первого порядка, анализ Фурье, вариационное исчисление. Краткое знакомство с элементами теории поверхностей и качественной теорией дифференциальных уравнений на плоскости.

1.3. Место курса в профессиональной подготовке выпускника: курс служит основой при изложении общих математических дисциплин третьего курса и значительной части специальных дисциплин физико-математического направления.

1.4. Требования к уровню освоения дисциплины «Высшая математика»

- знание основных понятий по темам: кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы, обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных первого порядка, ряды и интегралы Фурье, вариационное исчисление, элементы геометрии поверхностей, элементы качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости,
- владение свойствами основных понятий по указанным темам,
- знание основных теоретических результатов курса и умение их применять и иллюстрировать,
- умение доказывать или обосновывать простые, но важные теоретические результаты и формулы,
- знание основных методов решения стандартных практических задач по указанным выше темам курса,
- иметь навыки решения стандартных практических задач по курсу,
- иметь представление о возможностях применения разделов курса в различных задачах естествознания.

2. Объем дисциплины, виды учебной работы, форма текущего, промежуточного и итогового контроля

Время чтения лекций по дисциплине	3-4 семестр
Примерное число студентов	120 студентов
Всего аудиторных занятий	210 часов
Из них лекций	105 часа
Практические занятия	105 часов
Самостоятельная работа студентов	170 часа

Итого (трудоемкость дисциплины)	380 часа
Текущий контроль	Контрольные работы и коллоквиумы в сроки, предусмотренные учебным планом.
Промежуточный контроль	Зачёты по итогам контрольных и экзамены в письменной форме в каждом семестре. Результаты коллоквиумов и контрольных учитываются на экзаменах в соответствии с правилами, приведенными ниже.
Итоговый контроль	Для студентов, обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика», предусмотрен государственный экзамен по математике. Вопросы курса «Высшая математика», выносимые на итоговый государственный экзамен, приведены в п.4.5.

Правила проведения коллоквиумов и экзаменов. Правила выставления итоговой семестровой оценки.

Отчетность по курсу в каждом семестре состоит из отчетности по упражнениям, по коллоквиуму и итоговой семестровой оценки (финальной оценки). Финальная оценка определяется результатами работы на упражнениях, коллоквиуме и экзамене и формируется как сумма с соответствующими весами болонских оценок по контрольным занятиям, коллоквиуму и собственно экзамену. Учет контрольных в итоговой семестровой оценке обязателен для учета качества усвоения материала за семестр.

Работа на практических занятиях по результатам контрольных оценивается болонской оценкой. Удовлетворительное освоение материала практических занятий оформляется в конце семестра "зачетом". Студенты, не получившие зачета, к экзамену не допускаются.

Для студентов, набравших на практике 2 болонских балла и выше переписывания контрольных не устраиваются. Для остальных студентов преподаватель устраивает переписывания по распоряжению деканата. В случае успешного переписывания студент получает ровно 2 болонских балла и зачет. В исключительных случаях допускаются переписывания, если студент пропустил контрольную по уважительной причине; в этом случае переписывание проводится на базе материала пропущенной контрольной.

Коллоквиум и экзамен проводятся в письменной форме. И экзамен, и коллоквиум состоят из двух частей: основной и дополнительной. Цель основной части экзамена (коллоквиума) - контроль умения решать стандартные задачи и знание основных теоретических результатов. Дополнительная часть экзамена (коллоквиума) служит для проверки способности студентов доказывать теоретические результаты и решать нестандартные задачи.

В основную часть коллоквиума входят 2 практические задачи и 2 кратких теоретических вопроса. В основную часть экзамена входят 4 практические задачи и 4 кратких теоретических вопроса.

Без ответов на вопросы дополнительной части экзамена (коллоквиума), максимальная болонская оценка за экзамен (коллоквиум) — 7 болонских баллов.

Ответы на вопросы второй (дополнительной) части экзамена (коллоквиума) проверяются и дают дополнительный вклад в оценку за коллоквиум только при условии успешной сдачи первой (основной) части экзамена (коллоквиума).

На дополнительной части коллоквиума предлагается доказать один из теоретических результатов курса и решить одну задачу повышенной сложности. На дополнительной части экзамена предлагается доказать два из теоретических результатов курса и решить две задачи повышенной сложности.

Материал коллоквиума не выносится на экзамен, за исключением тех случаев, когда студент не сдал коллоквиум. Студенты, не сдавшие коллоквиум, сдают материал коллоквиума на экзамене.

Финальная оценка - это итоговая оценка, выставляемая в зачетку и в ведомость. Финальная болонская оценка вычисляется по сумме баллов, полученных за работу на семинарах, за коллоквиум и за экзамен. Пересчёт суммарно набранных баллов в финальную болонскую оценку производится по формуле

финальная оценка = 4/13 оценки за семинары+3/13 оценки за коллоквиум +6/13 оценки за экзамен

3. Содержание дисциплины

3.1. Темы лекций по дисциплине:

5-й семестр (всего 45 часов, в середине семестра коллоквиум, в конце семестра экзамен)

1. Интуитивное понятие кратного интеграла и трудности на пути его обоснования. Двойной интеграл по прямоугольнику. Его свойства. Двойной интеграл по множеству. Жордановы множества на плоскости и их площадь.
2. Тройной интеграл по прямоугольному параллелепипеду. Его свойства. Тройной интеграл по множеству. Жордановы множества и их объем.
3. Многократный интеграл по брусу. Его свойства. Интеграл по множеству. Жордановы множества и их объем.
4. Понятие об интегрируемых функциях. Основные критерии интегрируемости.
5. Теорема Фубини. Сведение кратного интеграла к повторному.
6. Аддитивные функции множеств. Их регулярность. Плотность регулярной аддитивной функции. Восстановление аддитивной функции по плотности.
7. Коэффициент искажения объема. Его нахождение при линейных преобразованиях и при непрерывно дифференцируемых преобразованиях.
8. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.
9. Основные криволинейные координатные системы (полярные, цилиндрические и сферические координаты) и соответствующие случаи замены переменных.
10. Многомерные сферические координаты. Объем многомерного шара.
11. Понятие о несобственном кратном интеграле. Локально и абсолютно интегрируемые функции. Теоремы сравнения.
12. Несобственный интеграл от функции, неограниченной в точке. Несобственный интеграл по неограниченному множеству.
13. Достаточные условия сходимости несобственных интегралов в двумерном и трехмерном случаях.
14. Некоторые приложения несобственных интегралов. Интегралы Пуассона и Гаусса. Гамма- и бета- функции Эйлера.
15. Теоремы о предельном переходе под знаком кратного и несобственного интеграла.
16. Понятия пути и кривой. Ориентированные кривые. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги). Его свойства.
17. Понятие простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл первого рода. Его свойства. Понятие о площади поверхности.

18. Криволинейный интеграл второго рода как интеграл от дифференциальной 1-формы. Его интерпретация и связь с криволинейным интегралом первого рода. Простейший случай формулы Стокса.
19. Формула Грина. Обоснование введения понятия дифференциальной формы. Независимость от пути криволинейного интеграла.
20. Алгебра дифференциальных форм.
21. Внешнее дифференцирование форм. Внутреннее умножение формы на вектор. Производная Ли дифференциальной формы. Сужение формы на поверхность.
22. Точные и замкнутые дифференциальные формы. Формула Картана. Теорема Пуанкаре о потенциале (первообразной форме).
23. Приложения дифференциальных форм к термодинамике. Тождества Максвелла.
24. Понятие об ориентации пространства. Ориентация поверхностей. Нормальная ориентация. Неориентируемые и односторонние поверхности. Поверхности с краем. Согласованная ориентация края ориентированной поверхности.
25. Интегрирование дифференциальных форм.
26. Общая формула Стокса.
27. Классические случаи формулы Стокса (формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского).
28. Элементы векторного анализа. Градиент, дивергенция и ротор. Оператор Гамильтона. Оператор Лапласа.
29. Операции векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах. Коэффициенты Ламе.
30. Дифференцирование интегралов от форм. Основная формула вариационного исчисления. Приложения к гидродинамике (уравнение неразрывности, уравнения Эйлера, закон сохранения вихрей).
31. Дифференциальные формы в электродинамике. Уравнения Максвелла. Понятие об операторе Ходжа.
32. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Их решение. Постановка задачи Коши. Интегральные кривые. Общий и частный интегралы. Обобщения на случай обыкновенного дифференциального уравнения высокого порядка.
33. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и их общее решение.
34. Общее решение неоднородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Нахождение частного решения неоднородного уравнения. Символический метод. Метод неопределенных коэффициентов.
35. Колебания в механических системах и электрических цепях. Резонанс.
36. Общие однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его свойства. Теорема Лиувилля.
37. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения. Метод вариации постоянных.
38. Общие однородные линейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского и его свойства. Теорема Лиувилля.
39. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения высокого порядка. Структура общего решения. Метод вариации постоянных. Резонанс.
40. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Матричная запись такой системы. Матричные решения. Матричная экспонента. Общее решение однородной системы. Структура общего решения неоднородной системы. Метод вариации для нахождения частного решения неоднородной системы.

41. Общие системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Их матричная запись и матричные решения. Разрешающий оператор и его свойства. Структура общего решения однородной и неоднородной систем. Метод вариации для нахождения частного решения неоднородной системы.
42. Основные классы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные, в полных дифференциалах, уравнения Бернулли) и методы их решения, интегрирующий множитель.
43. Дифференциальные уравнения высоких порядков, допускающие понижение порядка.
44. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений. Теоремы Пеано и Пикара. Метод сжатых отображений.
45. Теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметра.
46. Дифференциальные уравнения первого порядка не разрешенные относительно производной. Общий интеграл и особое решение таких уравнений. Уравнение Клеро и его особое решение. Преобразование Лежандра.
47. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Лучевые координаты. Метод характеристик. Уравнение Лиувилля.
48. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Метод характеристик. Уравнение Эйлера-Хопфа-Бюргерса, возникновение ударной волны.
49. Понятие о методе характеристик для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка. Уравнение эйконала.

6-й семестр (всего 60 часов, в середине семестра коллоквиум и в сессию экзамен)

49. Абсолютно сходящиеся тригонометрические ряды. Сумма ряда, нахождение коэффициентов ряда по сумме.
50. Понятие о коэффициентах Фурье в абстрактном евклидовом пространстве. Их свойства. Понятие об абстрактном ряде Фурье.
51. Тригонометрические ряды Фурье.
52. Свертка периодических функций. Понятие о плотности гладких функций в пространствах непрерывных и интегрируемых функций.
53. Лемма Римана-Лебега.
54. Теоремы Дирихле о равномерной и поточечной сходимости рядов Фурье для непрерывно дифференцируемых функций. Сходимость рядов Фурье в среднеквадратичном. Равенство Парсеваля.
55. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Ряд Фурье и сдвиг.
56. Приложения рядов Фурье для решения дифференциальных, разностных и интегральных уравнений.
57. Постановка задачи Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций и собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. Замкнутость полной системы собственных функций.
58. Преобразование Фурье. Его простейшие свойства. Теорема Фурье об обращении.
59. Унитарность преобразования Фурье. Функции класса Шварца. Равенство Парсеваля.
60. Преобразование Фурье гауссовой плотности. Другие примеры. Теоремы подобия и сдвига для преобразования Фурье.
61. Свертка функций на оси. Ее свойства. Преобразование Фурье свертки.

62. Преобразование Фурье производной. Связь гладкости со скоростью убывания при преобразовании Фурье.
63. Приложения преобразования Фурье для решения дифференциальных, разностных и интегральных уравнений.
64. Простейшая задача вариационного исчисления. Интегральный функционал. Его вариация. Примеры вариационных задач.
65. Основная лемма вариационного исчисления и ее вариации. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа.
66. Первые интегралы уравнения Эйлера-Лагранжа.
67. Основные примеры. Геодезические, геодезические на сфере, задача о брахистохроне, задача о минимальной поверхности вращения.
68. Обобщения. Функционалы вектор-функций. Параметрическое представление. Функционалы с высшими производными.
69. Задачи со свободными концами и естественные граничные условия. Условия трансверсальности.
70. Кратные интегралы и уравнения Эйлера-Остроградского. Волновое уравнение как уравнение Эйлера.
71. Условные вариационные задачи. Изопериметрическая задача. Метод множителей Лагранжа. Задача Дидоны.
72. Задача Лагранжа. Голономные и неголономные связи. Метод множителей Лагранжа. Приложения к геодезическим.
73. Первое необходимое условие экстремума. Условие Вейерштрасса-Эрдмана на изломе. Приложения к функционалам Ферма геометрической оптики.
74. Гамильтонов подход в вариационном исчислении. Приложение техники дифференциальных форм. Теорема Нетер. Законы сохранения.
75. Канонические уравнения Гамильтона.
76. Понятие поля экстремалей. Инвариантный интеграл Гильберта. Функция поля. Уранение Гамильтона-Якоби. Теорема Якоби о построении решения канонических уравнений. Метод разделения переменных для решения уравнения Гамильтона-Якоби.
77. Теория второй вариации. Необходимое условие Лежандра. Уранение Якоби. Понятие о сопряженной точке. Необходимое условие Якоби и его геометрический смысл. Уравнение Якоби как уравнение в вариациях для уравнения Эйлера. Каустика.
78. Сильные и слабые экстремумы. Достаточные условия слабого экстремума.
79. Прямые методы в вариационном исчислении. Вариационный подход к задаче Штурма-Лиувилля. Минимаксный принцип в задачах на собственные значения. Теорема Куранта о сравнении собственных чисел. Доказательство стремления собственных значений задачи Штурма-Лиувилля к бесконечности.
80. Элементы геометрии поверхностей. Первая квадратичная форма поверхности. Метрический тензор.
81. Вторая квадратичная форма поверхности. Отображения Гаусса и Вейнгартена. Нормальная кривизна, главные кривизны,
82. Средняя и полная (гауссова) кривизна. Их геометрический смысл. Теорема Гаусса о полной кривизне.
83. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости. Фазовые траектории, фазовый портрет.
84. Фазовые портреты простых линейных систем.
85. Теорема о линеаризации. Понятие о предельном цикле. Достаточное условие отсутствия предельных циклов.
86. Фазовые портреты гамильтоновых систем на плоскости.

87. Примеры фазовых портретов. Фазовый портрет физического маятника. Фазовый портрет системы хищник-жертва.

3.2. Примерный план практических занятий
5-й семестр (60 часов)

1) занятие: двойной интеграл
2) занятие: тройной интеграл
3) занятие: 1-я контрольная работа (1 час, расстановка пределов интегрирования в двойных и тройных интегралах, две задачи), замена переменных в двойном интеграле
4) занятие: замена переменных в двойном интеграле (продолжение)
5) занятие: замена переменных в тройном интеграле
6) занятие: замена переменных в тройном интеграле (продолжение)
7) занятие: приложения двойных и тройных интегралов
8) занятие: приложения двойных и тройных интегралов (продолжение), 2-я контрольная работа (1 час, замена переменных в двойных и тройных интегралах, две задачи)
9) занятие: криволинейный интеграл 1 рода, поверхностный интеграл 1-го рода
10) занятие: поверхностный интеграл 1 рода (продолжение)
11) занятие: 3-я контрольная работа (1 час, криволинейный и поверхностный интегралы первого рода, две задачи), криволинейный интеграл 2 рода
12) занятие: формула Грина
13) занятие: 4-я контрольная работа (1 час, формула Грина, две задачи), дифференциальные формы
14) занятие: дифференциальные формы (продолжение)
15) занятие: поверхностный интеграл 2 рода
16) занятие: формула Стокса
17) занятие: формула Остроградского–Гаусса
18) занятие: векторный анализ
19) занятие: 5-я контрольная работа (2 часа, интегралы 2-го рода, формулы Гаусса-Остроградского и Стокса, векторный анализ, четыре задачи) – 8 баллов
20) занятие: линейные дифференциальные уравнения 1 порядка
21) занятие: 6-я контрольная работа (1 час, линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка, две задачи), линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами
22) занятие: линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами
23) занятие: линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (продолжение)
24) занятие: линейные дифференциальные уравнения 2 порядка
25) занятие: системы линейных дифференциальных уравнений
26) занятие: системы линейных дифференциальных уравнений (продолжение)
27) занятие: 7-я контрольная работа (2 часа, линейные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, четыре задачи) – 8 баллов
28) занятие: нелинейные дифференциальные уравнения
29) занятие: нелинейные дифференциальные уравнения (продолжение)
30) занятие: нелинейные дифференциальные уравнения, 8-я контрольная работа (1 час, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, две задачи)

6-семестр (45 часов)

1) неделя: тригонометрические ряды Фурье
2) неделя: разложение четных и нечетных функций, интегрирование рядов Фурье
3) неделя: 1-я контрольная (1 час — 5 баллов, разложение в ряд Фурье, две задачи), свертка периодических функций
4) неделя: приложения рядов Фурье
5) неделя: 2-я контрольная работа (1 час — 5 баллов, решение уравнений при помощи ряда Фурье, две задачи), задача Штурма–Лиувилля
6) неделя: задача Штурма–Лиувилля (продолжение), преобразование Фурье
7) неделя: приложения интеграла Фурье
8) неделя: 3-я контрольная работа (2 часа — 10 баллов, задача Штурма-Лиувилля и интеграл Фурье, четыре задачи)
9) неделя: коллоквиум
10) неделя: простейшая задача вариационного исчисления
11) неделя: 4-я контрольная работа (1 час — 5 баллов, простейшая вариационная задача, две задачи), экстремали двойных и тройных интегралов
12) неделя: задачи на условный экстремум
13) неделя: задачи со свободными концами и условия трансверсальности
14) неделя: 5-я контрольная работа (2 часа — 10 баллов, условные вариационные задачи, условия трансверсальности, функционалы нескольких функций и интегралы нескольких переменных, четыре задачи), канонические уравнения
15) неделя: уравнение Гамильтона–Якоби, 6-я контрольная работа (1 час — 5 баллов, канонические уравнения, уравнение Гамильтона-Якоби, две задачи).

4. Вопросы к экзамену

4.1.Перечень основных вопросов коллоквиума в третьем семестре

1. Что такое двойной интеграл? Перечислите его основные свойства.
2. Что такое тройной интеграл ? Перечислите его основные свойства.
3. Как свести двукратный интеграл к повторному?
4. Что такое якобиан отображения R^3 → R^3 ? Его геометрический смысл.
5. Опишите формулу замены переменных в кратном интеграле.
6. Как выглядит двукратный интеграл в полярных координатах? Дайте пример.
7. Как выглядит трехкратный интеграл в цилиндрических координатах? Дайте пример.
8. Как выглядит трехкратный интеграл в сферических координатах? Дайте пример.
9. Что такое несобственный интеграл от функции: неограниченной в точке? Приведите пример?
10. Что такое несобственный интеграл по неограниченному множеству? Приведите пример?
11. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости двойного интеграла в точке и на бесконечности.
12. Сформулируйте признаки абсолютной сходимости трехкратного интеграла в точке и на бесконечности.
13. Что такое гладкая кривая на плоскости, в пространстве? Касательный вектор.
14. Что такое ориентация кривой? Параметризация, согласованная с ориентацией.
15. Определение и физический смысл криволинейного интеграла 1-ого рода.
16. Что такое гладкая поверхность? Как вычислить площадь гладкой поверхности
17. Определение и физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода.

4.2. Перечень основных вопросов экзамена (без учета коллоквиума) в третьем семестре

1. Определение и физический смысл криволинейного интеграла 2-ого рода на плоскости.
2. Как записать криволинейный интеграл от дифференциальной формы на плоскости в терминах интеграла 1-го рода?
3. Дифференциальная 1-форма на плоскости. Интерпретация, интегрирование 1-формы.
4. Какие алгебраические операции над 0-, 1- и 2-формами на плоскости Вы знаете?
5. Что такое внешний дифференциал функции и 1-формы на плоскости?
6. Ориентация плоской области. Интегрирование 2-форм. Связь с двукратным интегралом.
7. Поясните формулу замены переменных в двукратном интеграле на языке форм.
8. Опишите формулу Грина на плоскости на языке форм.
9. Как записать формулу Грина в терминах криволинейного интеграла 1-ого рода?
10. Условия независимости криволинейного интеграла на плоскости от пути интегрирования.
11. Когда 1-форма на плоскости является дифференциалом функции? Как найти первообразную (точной) 1-формы на плоскости?
12. Ориентация поверхности и области в трехмерном пространстве.
13. Всякая ли поверхность допускает ориентацию?
14. Что такое согласованные ориентации кривой и ее края?
15. Что такое согласованные ориентации поверхности и ее края в пространстве?
16. Что такое согласованные ориентации области и ее границы в трехмерном пространстве?
17. Какие дифференциальные формы бывают в трехмерном пространстве? Их интерпретация.
18. Какие алгебраические операции над дифференциальными формами в пространстве Вы знаете?
19. Что такое внешний дифференциал формы в пространстве?
20. Поверхностный интеграл 2-ого рода: интеграл от 2-формы по поверхности, определение.
21. Как записать поверхностный интеграл 2-ого рода через интеграл 1-ого рода?
22. Интеграл от 3-формы по области в трехмерном пространстве, определение, связь с трехкратным интегралом.
23. Поясните формулу замены переменных в трехкратном интеграле на языке форм.
24. Каков общий вид формулы Стокса для множеств в трехмерном пространстве?
25. Специальный случай формулы Стокса: интеграл от дифференциала функции по кривой (формула Ньютона-Лейбница)
26. Специальный случай общей формулы Стокса: интеграл от дифференциала 1-формы по поверхности (классическая формула Стокса)
27. Специальный случай формулы Стокса: интеграл от дифференциала 2-формы по области (формула Гаусса — Остроградского).
28. Дайте определение точной и замкнутой дифференциальных форм в пространстве. Первообразная (потенциал) формы.
29. Когда дифференциальная форма в пространстве является точной?
30. Как найти первообразную точной 1-формы в пространстве?
31. Как найти первообразную точной 2-формы в пространстве?
32. Что такое градиент функции? Явная формула в декартовых координатах.

33. Что такое ротор векторного поля? Дайте явную формулу в декартовых координатах? В чем состоит физический смысл ротора?
34. Что такое дивергенция векторного поля? Дайте явную формулу в декартовых координатах. В чем состоит физический смысл дивергенции.
35. Определение оператора Лапласа, явная формула в декартовых координатах.
36. Что такое оператор "набла"?
37. Что такое коэффициенты Ламе? Чему равны коэффициенты Ламе для сферических координат?
38. Чему равен оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах? Какой смысл имеют коэффициенты Ламе?
39. Что такое потенциальное векторное поле и как найти его потенциал?
40. Что такое соленоидальное векторное поле и как найти его векторный потенциал?
41. Как получить общее решение линейного дифференциального уравнения 1-ого порядка? Дайте формулу для решения задачи Коши.
42. Что можно сказать о структуре множества решений однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка?
43. Что Вы знаете о вронскиане для дифференциального уравнения 2-ого порядка?
44. Как найти общее решение линейного однородного уравнения 2-ого порядка, если известно одно его частное решение?
45. Как найти решение линейного неоднородного уравнения 2-ого порядка, если известно общее решение однородного уравнения?
46. Что можно сказать о структуре множества решений однородного и неоднородного линейного дифференциального уравнения n - ого порядка?
47. Что Вы знаете о вронскиане для дифференциального уравнения n - ого порядка?
48. Дать формулу общего решения дифференциального уравнения вида (D — k1)^{r1}(D - k2)^{r2}y = 0.
49. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов для линейного дифференциального уравнения n - ого порядка?
50. Что такое линейная система двух дифференциальных уравнений 1-ого порядка и что можно сказать о структуре множества решений этой системы, однородной и неоднородной? Как такая система связана со скалярным уравнением?
51. Что Вы знаете о вронскиане для системы линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка?
52. Какие уравнения описывают линейные колебания в механических системах и электрических цепях?
53. Что такое резонанс?
54. Что такое разрешающий оператор (резольвента) задачи Коши для системы линейных уравнений? Опишите его свойства? В чем его значение?
55. Дайте формулу для разрешающего оператора линейной системы двух уравнений в терминах решений однородной системы.
56. Что такое матричная экспонента? Как ее вычислить?
57. Как построить решения однородной системы 1-ого порядка с постоянными коэффициентами? Дайте общую формулу для разрешающего оператора линейной системы с постоянными коэффициентами.
58. В чем состоит геометрический смысл дифференциального уравнения 1-ого порядка и задачи Коши?
59. Что такое уравнение с разделяющимися переменными? Что такое деление переменных? Что такое однородные уравнения? Как они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными?
60. В чем состоит метод ломаных Эйлера? Сформулируйте теорему Пеано существования решения задачи Коши.

61. Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши. Приведите примеры нарушения условий и утверждений теоремы.
62. Опишите метод характеристик для линейных уравнений 1-ого порядка. Выпишите уравнения на характеристики для уравнения Лиувилля.
63. Опишите метод характеристик для квазилинейных уравнений 1-ого порядка.

4.3. Перечень основных вопросов коллоквиума в четвертом семестре

1. Как найти коэффициенты равномерно сходящегося тригонометрического ряда по его сумме?
2. Что такое коэффициенты Фурье по ортонормированной системе в абстрактном векторном пространстве со скалярным произведением? Опишите проекционное свойство частичной суммы ряда Фурье.
3. Что такое равенство Парсеваля? Объясните, почему коэффициенты Фурье обязаны убывать.
4. В чем состоит минимизирующее свойство коэффициентов Фурье?
5. Что такое ряд Фурье на пространстве $2l$ -периодических функций?
6. Как разложить функцию, заданную на интервале $(0,l)$, в ряд по косинусам кратных дуг? по синусам?
7. Дайте определение свертки периодических функций. Как найти коэффициенты Фурье свертки?
8. Как найти производную свертки, если один из сверточных сомножителей дифференцируем? Как это свойство можно использовать для сглаживания функции?
9. Что такое фильтр и передаточная функция в теории обработки радиосигналов? Объясните, почему не существует идеального фильтра.
10. Что утверждает лемма Римана–Лебега? Какова ее связь со стремлением коэффициентов Фурье к нулю?
11. Сформулируйте теорему Дирихле для непрерывно дифференцируемых функций. Почему ряд Фурье сходится к такой функции равномерно?
12. Что такое сходимость рядов Фурье в среднеквадратичном? Какова связь такой сходимости с равенством Парсеваля?
13. Как найти коэффициенты Фурье первообразной функции с нулевым средним?
14. Что представляет собой ряд Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания коэффициентов Фурье?

4.4. Перечень основных вопросов экзамена (без учета коллоквиума) в четвертом семестре

Интеграл Фурье:

1. Что такое преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции? Опишите его основные свойства.
2. Сформулируйте теорему об обращении преобразования Фурье.
3. Что представляет собой равенство Парсеваля для преобразования Фурье? Дайте примеры.
4. Как найти преобразование Фурье производной? Какова связь между гладкостью функции и скоростью убывания ее преобразования Фурье на бесконечности?

5. Как найти преобразование Фурье произведения функции на аргумент? Какова связь между скоростью убывания функции на бесконечности с гладкостью ее преобразования Фурье?
6. Дайте определение свертки функций на оси. Чему равно преобразование Фурье свертки.
7. Что такое гауссова плотность? Чему равно преобразование Фурье гауссовой плотности?
8. Асимптотика состояния свободной нерялитивистской квантовой частицы на больших временах.

Вариационное исчисление:

1) Простейшие задачи вариационного исчисления:

   1. Что такое интегральный функционал и его производная? Что такое вариация интегрального функционала?
   2. Сформулируйте основную лемму вариационного исчисления. Опишите идею ее доказательства.
   3. Что такое уравнение Эйлера–Лагранжа? Как оно получается?
   4. Что такое экстремали? Что называется вариационной производной? Почему?
   5. Пусть функция Лагранжа $F(x,y,y')$ не зависит от переменной x . Что представляет собой первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа? Почему?
   6. Что такое геодезические? Как ставится соответствующая вариационная задача? Как она решается в случае ортогональных локальных координат при условии, что коэффициенты первой квадратичной формы зависят лишь от одной из переменных?
   7. Что такое естественные граничные условия? В каких вариационных задачах они возникают?

2) Обобщения, приложения и трансверсальность:

   1. Выпишите уравнения Эйлера–Лагранжа в случае нескольких функций. Как они получаются?
   2. Сформулируйте принцип наименьшего действия в лагранжевой механике. Что представляют собой уравнения Эйлера –Лагранжа, если кинетическая энергия равна T = \frac{m(x'2+y'2+z'2)}{2} , а потенциальная $U = U(x,y,z)$?
   3. Выпишите уравнение Эйлера–Лагранжа для экстремалей двойных интегралов. Как оно выводится?
   4. Что представляет собой волновое уравнение? Дайте его интерпретацию как уравнения Эйлера–Остроградского.
   5. Как ставится изопериметрическая задача? Как она сводится к задаче на условный экстремум функции нескольких переменных?
   6. Как ставится задача Лагранжа? В чем отличие голономных связей от неголономных? Что такое множители Лагранжа в случае задачи Лагранжа, в чем их отличие от множителей Лагранжа для изопериметрической задачи?
   7. Рассмотрите задачу о геодезических на поверхности $G(x,y,z) = 0$ как задачу Лагранжа. Как это позволяет охарактеризовать геодезические?
   8. Что такое условие трансверсальности? Каков его геометрический смысл?
   9. Сформулируйте принцип Ферма в геометрической оптике. Что представляет собой трансверсальность в геометрической оптике. Почему?
   10. Выпишите первое необходимое условие. Что отличает его от уравнения Эйлера–Лагранжа?

11. Выпишите условие Вейерштрасса–Эрдмана (на изломе). Какое заключение оно позволяет сделать в случае функционалов геометрической оптики?

3) Гамильтонова механика и поля экстремалей:

1. Что понимается под инвариантностью интегрального функционала? Сформулируйте теорему Нетер. Прокомментируйте с ее помощью закон сохранения энергии.
2. Опишите функцию Гамильтона как преобразование Лежандра. Что такое условие регулярности? Что такое инволютивность преобразования Лежандра? Что такое канонический вид уравнений Эйлера–Лагранжа?
3. Дайте определение поля экстремалей. Какое поле называется центральным? Объясните, как вложение экстремали в поле помогает в определении характера этой экстремали.
4. Дайте определение функция поля. Какому дифференциальному уравнению она подчиняется? Объясните, как по частному решению уравнения Гамильтона–Якоби можно построить поле экстремалей?
5. Уравнение Якоби, сопряженные точки
6. Дайте определение второй вариации. Что представляет собой уравнение Якоби. Что означает, что оно является уравнением в вариациях по отношению к уравнению Эйлера –Лагранжа?
7. Дайте определение сопряженной точки. Опишите геометрический смысл ее существования. Что такое каустика? Почему экстремаль с сопряженной точкой не может доставлять экстремум функционалу?

4) Прямые методы

1. Дайте вариационное описание собственных значений задачи Штурма–Лиувилля. Объясните рост собственных значений.
2. В чем заключается минимаксное свойство собственных значений? Объясните, как это позволяет сделать вывод о росте собственных значений к бесконечности.

Изучение фазовых портретов:

1. Что такое автономные системы дифференциальных уравнений на плоскости? Что представляет собой фазовый портрет такой системы?
2. Что такое гамильтоновы системы на плоскости? Какие их свойства Вам известны?
3. Расскажите об интеграле энергии гамильтоновой системы.
4. Опишите фазовые портреты линейных систем в случае вещественных собственных значений.
5. Опишите фазовые портреты линейных систем в случае комплексных собственных значений.
6. Что такое критические (неподвижные) точки общих систем дифференциальных уравнений на плоскости. Что утверждает теорема о линеаризации.
7. Что понимается под предельным циклом. Приведите пример.
8. Сформулируйте достаточное условие отсутствия замкнутых траекторий на плоскости. Объясните его происхождение.

Элементы геометрии поверхностей:

1. Что Вы знаете о первой квадратичной форме поверхности?
2. Что Вы знаете о второй квадратичной форме поверхности?
3. Расскажите о нормальной кривизне поверхности. Что такое главные кривизны?
4. Что Вы знаете о средней кривизне поверхности?
5. Что Вы знаете о полной кривизне поверхности?

Все материалы по курсу, в том числе примерный список вопросов в дополнительной части экзамена и тематику экзаменационных задач, можно найти на сайте кафедры или по адресу

http://math.nw.ru/~budylin

4.5. Вопросы, выносимые на итоговый государственный экзамен
(только для направления 010600 «Прикладные математика и физика»)

1. Кратные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторным.
2. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные и сферические координаты.
3. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Определения, интерпретация.
4. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
5. Операторы grad, div, rot, Δ (определение в декартовых координатах).
6. Формула Грина. Потенциал векторного поля на плоскости.
7. Формула Гаусса-Остроградского.
8. Обыкновенные дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности решения задачи Коши.
9. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Пространство решений. Определитель Вронского.
10. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
11. Линейные системы первого порядка с постоянными коэффициентами.
12. Тригонометрический ряд Фурье. Формулы для коэффициентов. Признак равномерной сходимости.
13. Ортонормированные системы. Ряд Фурье по ортонормированной системе, сходимость в среднем. Равенство Парсеваля.
14. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций.
15. Интеграл Фурье. Обратное преобразование Фурье. Свертка, преобразование Фурье свертки.
16. Первая вариация интегрального функционала. Необходимое условие экстремума. Уравнения Эйлера-Лагранжа.
17. Естественные граничные условия.
18. Задача Лагранжа.

5. Литература

5.1. Основная

1. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т2, М. Наука 1974.
2. Г.Е.Шилов. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.Наука 1971.
3. И.А.Виноградова и др. Математический анализ в задачах и упражнениях. ИМУ, 1991.
4. Г.Е.Шилов. Математический анализ. Функции одной вещественной переменной. Ч3. М.Наука, 1970.
5. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, т4 ч.1, М. Наука 1974.
6. В.С.Буслаев. Вариационное исчисление. ЛГУ, 1980.
7. А.М.Будылин. Методическое пособие по высшей математике в третьем семестре с примерами решения типовых задач. СпбГУ, 2007
8. А.М.Будылин. Основные вопросы по высшей математике в третьем семестре. СпбГУ, 2007
9. Е.Е.Лемехов и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу Высшая математика, III семестр, ЛГУ, 1984
10. Е.Е.Лемехов и др. Методические указания к практическим занятиям по курсу Высшая математика, IV семестр, ЛГУ, 1987
11. А.М.Будылин. Вариационное исчисление на языке дифференциальных форм. СпбГУ, 2009

5.2. Дополнительная

- C.H.Edwards, Advanced calculus of several variables, Dover, 1994
- Frankel, The geometry of physics. Cambridge, 1997
- H.Hochstadt, Differential equations, a modern approach, Dover, 1975
- H.Sagan, Introduction to the calculus of variations, Dover, 1992
- D.Monasse, Course des mathematiques, Vulbert, 1998
- Л.Шварц, Анализ, М.Мир, 1972

Раздел 3. Процедура разработки и утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Разработчик(и) рабочей программы учебной дисциплины

Фамилия, имя, отчество	Учёная степень	Учёное звание	Должность	Контактная информация (служебный адрес электронной почты, служебный телефон)
Будылин Александр Михайлович	к.ф.-м.н	доцент	доцент	

В соответствии с порядком организации внутренней и внешней экспертизы образовательных программ, установленных приказом первого проректора по учебной работе от 18.02.2009 № 195/1, проведена двухуровневая экспертиза:

первый уровень (оценка качества содержания программы и применяемых педагогических технологий)		
Наименование кафедры	Дата заседания	№ протокола
Кафедра Высшей математики и математической физики	06.10.2010	№ 2
Кафедра Физики полимеров	20.10.2010	№ 4
второй уровень (соответствие целям подготовки и учебному плану образовательной программы)		
Экспертиза второго уровня выполнена в порядке, установленном приказом		
должностное лицо	*дата приказа*	*№ приказа*
Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа
Методическая комиссия	22.10.2010	протокол №3

Иные документы об оценке качества рабочей программы учебной дисциплины

Документ об оценке качества	Дата документа	№ документа

Утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа
Ученый Совет физического факультета	26.10.2010	№3

Внесение изменений в рабочую программу учебной дисциплины

Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа