ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет

Регистрационный номер
рабочей программы учебной дисциплины:

10	/	*Ф3*	/	*107.2*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Методы математической физики (углубленный поток).

основных образовательных программ высшего профессионального образования
Физика

подготовки по направлению
010700 *Физика*

по профилю *по всем профилям*
для получения квалификации (степени) *бакалавр*

Рабочая программа учебной дисциплины может использоваться при совпадении значения трудоёмкости в зачётных единицах в одной или нескольких основных и дополнительных образовательных программах, характеристики которых указываются на титульном листе

код дисциплины *107.2* **по учебному плану** **форма обучения** *очная*

виды промежуточной аттестации: **зачётов** *2* **экзаменов** *2*

Трудоёмкость учебной дисциплины 11 **зачётных единиц**

Санкт-Петербург
2010

1.Организационно-методический раздел

1.1. Цель изучения дисциплины: формирование у студентов, обучающихся на физическом факультете, знаний о завершающем разделе высшей математики – математической физике, научить использовать соответствующие методы в различных областях теоретической физики.

1.2. Задачи курса: знакомство с основными принципами построения комплексного анализа, теории обобщенных функций, уравнений математической физики, а также асимптотическими методами.

1.3. Место курса в профессиональной подготовке выпускника: курс является одним из центральных элементов образования физика-теоретика.

1.4. Требования к уровню освоения дисциплины «Методы математической физики»

- знать основные определения и утверждения для голоморфных функций
- иметь представление о Римановых поверхностях
- знать основные конформные отображения
- знать основные определения и утверждения теории интегралов Эйлера
- знать основные определения и утверждения теории обобщенных функций
- знать и уметь применять метод разделения переменных для уравнений математической физики
- иметь представления об основных асимптотических методах оценки интегралов
- знать принципы основные принципы построения аналитической теории дифференциальных уравнений
- иметь представление об основных свойствах решений уравнений Лежандра, Бесселя, Эйри и Эрмита.

2. Объем дисциплины, виды учебной работы, форма текущего, промежуточного и итогового контроля

Время чтения лекций по дисциплине	5-6 семестр
Примерное число студентов	40 студентов
Всего аудиторных занятий	195 часов
Из них лекций	120 часов
Практические занятия	75 часов
Самостоятельная работа студентов	155 часов
Итого (трудоемкость дисциплины)	350 часов
Текущий контроль	Контрольные работы, тесты, коллоквиумы в 5-ом и 6-ом семестрах, в сроки, предусмотренные учебным планом
Промежуточный контроль	Зачеты по практическим занятиям – в 5-м и в 6-м семестрах, экзамены – в 5-м и в 6-м семестрах. Результаты зачетов и коллоквиумов учитываются на экзаменах в соответствии с правилами, приведенными ниже.
Итоговый контроль	

Правила проведения коллоквиумов и экзаменов

Итоговая оценка выставляется по десятибалльной шкале и является средним арифметическим от трех оценок: оценки за коллоквиум, оценки полученной на экзамене и оценки полученной на зачете. В случае, если коллоквиум не сдан, на экзамене сдается весь курс и полученная оценка используется дважды - и как оценка за коллоквиум, и как оценка за экзамен.

Оценка на коллоквиуме и на экзамене складывается из оценки за тест (максимум 4 балла) и оценки за вторую часть экзамена, которая состоит из теоретических вопросов и задач (максимум 6 баллов).

Тест состоит из десяти вопросов, включающих в себя формулировки основных определений, теорем и формул, отражающих содержание курса. В зависимости от результатов теста студент получает следующие баллы:

1) 0-4 правильных ответа - общая оценка "неудовлетворительно" и студент не допускается ко второй части
2) 5 правильных ответов - общая оценка "удовлетворительно" (2 балла) и студент не допускается ко второй части
3) 6-7 правильных ответов - студент получает +2 балла к итоговой оценке и допускается ко второй части
4) 8-9 правильных ответов студент - получает +3 балла к итоговой оценке и допускается ко второй части
5) 10 правильных ответов - студент получает + 4 балла к итоговой оценке и допускается ко второй части

3. Содержание дисциплины

3.1. Темы лекций по дисциплине:

5-й семестр (всего 60 часов, в середине семестра коллоквиум и в зимнюю сессию экзамен)

Голоморфные функции

1. Комплексные числа
2. Дифференцируемые функции комплексного переменного, голоморфные функции, связь с гармоническими функциями
3. Свойства голоморфных функций, примеры
4. Обращение голоморфной функции, экспонента и логарифм
5. Кривые и области, теорема Коши
6. Формула Коши
7. Формула Коши для производных
8. Теорема Лиувилля, теорема о среднем, принцип максимума модуля
9. Геометрический смысл голоморфности

Ряды Тейлора, Лорана, изолированные особые точки

10. Первообразная голоморфной функции, теорема Морера
11. Сходящиеся последовательности голоморфных функций, теорема Вейештрасса
12. Ряды Тейлора голоморфных функций
13. Теорема единственности, принцип аналитического продолжения, принцип симметрии
14. Ряд Лорана голоморфной функции, оценки Коши коэффициентов ряда Лорана
15. Изолированные особые точки голоморфных функций
16. Теорема Сохоцкого.

17. Вычеты, теорема о вычетах.
18. Вычисление интегралов по вычетам
19. Леммы, используемые при вычислении интегралов по вычетам, лемма Жордана
20. Индекс функции на кривой, принцип аргумента
21. Теорема Руше, основная теорема алгебры
22. Теорема о сумме вычетов, разложение рациональной функции на простые дроби.
23. Мероморфные функции, разложение по главным частям
24. Разложение котангенса по главным частям
25. Бесконечные произведения
26. Представление целой функции в виде виде бесконечного произведения. Разложение синуса.

Римановы поверхности и аналитические пространства.

27. Риманова поверхность логарифма
28. Расширенная комплексная плоскость как топологическое пространство
29. Аналитическое пространство, сфера Римана
30. Функции, голоморфные из C в C, из C в {\bar C}, из {\bar C} в C, из {\bar C} в {\bar C}.
31. Аналитические изоморфизмы и автоморфизмы. Теорема Римана
32. Аналитические автоморфизмы C и {\bar C}
33. Аналитические автоморфизмы U и P

Г-функция

34. Определение и аналитические свойства Г- и В-функций.
35. Связь Г- и В-функций
36. Функциональные соотношения для Г-функции
37. Контурные интегралы для Г-функции
38. Формула Стирлинга и формула удвоения (без доказательства)

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение и основные свойства

39. Пространства основных и обобщенных функций
40. Регулярные обобщенные функции, обозначения обобщенных функций
41. Сходящиеся последовательности обобщенных функций
42. Примеры сингулярных обобщенных функций
43. Умножение обобщенных функций на гладкие, замена переменных
44. Дифференцирование обобщенных функций, основные свойства операции дифференцирования, примеры
45. Ограничение обобщенных функций на интервал, обобщенная функция – производная конечного порядка непрерывной
46. Формула Пуассона
47. Дельта-образные последовательности
48. Обобщенные функции нескольких переменных
49. Примеры обобщенных функций нескольких переменных
50. Прямое произведение обобщенных функций
51. Свертка обобщенных функций

Преобразование Фурье обобщенных функций

52. Пространства Шварца основных и обобщенных функций
53. Преобразование Фурье функций класса Шварца
54. преобразование Фурье обобщенных функций, свойства преобразования Фурье обобщенных функций
55. Вычисление преобразований Фурье регулярных обобщенных функций. Формулы Сохоцкого

Фундаментальные решения и функции Грина

56. Дифференциальное уравнение в обобщенных функциях. Фундаментальное решение уравнений с постоянными коэффициентами.
57. Фундаментальное решение уравнения с переменными коэффициентами. Функция Грина задачи Коши
58. Функция Грина краевой задачи, задачи Штурма-Лиувилля.

Основные задачи для уравнений математической физики.

Нестационарные уравнения.

59. Уравнения типа волнового, Шредингера и теплопроводности. Типичные задачи. Их корректность.
60. Уравнения типа Лапласа и Гельмгольца. Типичные задачи. Их корректность.
61. Вывод уравнения струны и задач для него.
62. Метод Даламбера в задаче Коши для уравнения однородной струны. Характер распространения сигнала.
63. Функция Грина задачи Коши для уравнения однородной струны. Явная формула, физический смысл и математическое значение.
63. Конечная однородная струна. Метод отражений.
64. Конечная неоднородная струна, метод Фурье (общая схема).
65. Задача Коши для 3-х мерного волнового уравнения. Функция Грина.
66. Метод спуска для 2-х мерного волнового уравнения.
67. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
68. Вывод уравнения теплопроводности.
69. Функция Грина задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности. Характер распространения теплового импульса.
70 Принцип максимума для уравнения теплопроводности, теорема единственности.

6-й семестр (всего 60 часов, в середине семестра коллоквиум и в весеннюю сессию экзамен)

Гл. 1. Уравнение Лапласа

1. Уравнение Лапласа, формулы Грина
2. Свойства гармонических функций
3. Краевые задачи для уравнения Лапласа
4. Функция Грина задачи Дирихле
5. Задача Дирихле в круге
6. Формула Пуассона
7. Построение функции Грина с помощью метода отражений для задачи Дирихле
8. Конформная инвариантность уравнения Лапласа

Гл. 3. Методы асимптотического вычисления интегралов

Гл. 4. Резольвента оператора Штурма-Лиувилля

Гл. 5. Аналитическая теория дифференциальных уравнений

3.2. Темы практических занятий
5-й семестр (30 часов)

Комплексные числа

Теорема Коши

Формула Коши

Ряд Тейлора

Принцип аналитического продолжения

Изолированные особые точки голоморфных функций

Вычеты. Подсчет интегралов по вычетам

Многозначные функции

Римановы поверхности

Контрольная работа

Аналитическое продолжение многозначных функций

Интегралы от многозначных функций

Конформные отображения

Принцип симметрии

Интеграл Кристофеля-Шварца

Контрольная работа. Зачет.

6-семестр (45 часов)

Определение обобщенных функций

Предел последовательности обобщенных функций.

Дифференцирование обобщенной функции

Преобразование Фурье обобщенной функции

Фундаментальные решения

Контрольная работа

Поведение решения в окрестности правильной особой точки

Поведение решения в окрестности не правильной особой точки

Интегральные представления

Асимптотики интегральных представлений

Контрольная работа. Зачет

.

4. Вопросы к экзамену

4.1. Примерный перечень вопросов к экзамену по курсу (5 семестр)

1.Комплексные числа
2. Дифференцируемые функции комплексного переменного, голоморфные функции, связь с гармоническими функциями
3. Свойства голоморфных функций, примеры
4. Обращение голоморфной функции, экспонента и логарифм
5. Кривые и области, теорема Коши
6. Формула Коши
7. Формула Коши для производных
8. Теорема Лиувилля, теорема о среднем, принцип максимума модуля
9. Геометрический смысл голоморфности
10. Первообразная голоморфной функции, теорема Морера
11. Сходящиеся последовательности голоморфных функций, теорема Вейештрасса
12. Ряды Тейлора голоморфных функций
13. Теорема единственности, принцип аналитического продолжения, принцип симметрии
14. Ряд Лорана голоморфной функции, оценки Коши коэффициентов ряда Лорана
15. Изолированные особые точки голоморфных функций
16. Вычеты, теорема о вычетах.
17. Вычисление интегралов по вычетам
18. Леммы, используемые при вычислении интегралов по вычетам, лемма Жордана
19. Индекс функции на кривой, принцип аргумента
20. Теорема Руше, основная теорема алгебры
21. Теорема о сумме вычетов, разложение рациональной функции на простые дроби.
22. Мероморфные функции, разложение по главным частям
23. Разложение котангенса по главным частям
24. Бесконечные произведения. Представление целой функции в виде бесконечного произведения. Разложение синуса.
25. Риманова поверхность логарифма
26. Расширенная комплексная плоскость как топологическое пространства
27. Аналитическое пространство, сфера Римана
28. Функции, голоморфные из C в C, из C в {\bar C}, из {\bar C} в C, из {\bar C} в {\bar C}.
29. Аналитические изоморфизмы и автоморфизмы. Теорема Римана
30. Аналитические автоморфизмы C и {\bar C}
31. Аналитические автоморфизмы U
32. Определение и аналитические свойства Г- и В-функций.
33. Связь Г- и В-функций
34. Функциональные соотношения для Г-функции
35. Контурные интегралы для Г-функции

36. Формула Стирлинга и формула удвоения (без доказательства)
37. Пространства основных и обобщенных функций
38. Регулярные обобщенные функции, обозначения обобщенных функций
39. Сходящиеся последовательности обобщенных функций
40. Примеры сингулярных обобщенных функций
41. Умножение обобщенных функций на гладкие, замена переменных
42. Дифференцирование обобщенных функций, основные свойства операции дифференцирования, примеры
43. Ограничение обобщенных функций на интервал, обобщенная функция – производная конечного порядка непрерывной
44. Формула Пуассона
45. Дельта-образные последовательности
46. Обобщенные функции нескольких переменных
47. Примеры обобщенных функций нескольких переменных
48. Прямое произведение обобщенных функций
49. Свертка обобщенных функций
50. Пространства Шварца основных и обобщенных функций
51. Преобразование Фурье функций класса Шварца
52. Преобразование Фурье обобщенных функций, свойства преобразования Фурье обобщенных функций
53. Вычисление преобразований Фурье регулярных обобщенных функций. Формулы Сохоцкого
54. Дифференциальное уравнение в обобщенных функциях. Фундаментальное решение уравнений с постоянными коэффициентами.
55. Фундаментальное решение уравнения с переменными коэффициентами. Функция Грина задачи Коши
56. Функция Грина краевой задачи, задачи Штурма-Лиувилля.

4.2. Примерный перечень вопросов к экзамену по курсу (6 семестр)

1.Уравнение струны. Постановка задачи Коши. Метод Даламбера
2. Функция Грина задачи Коши для уравнения струны
3. Функция Грина задачи Коши для волнового уравнения в высших размерностях
4. Вывод уравнения теплопроводности.
5. Функция Грина задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.
6. Характер распространения теплового импульса.
7. Уравнение Лапласа, формулы Грина
8. Свойства гармонических функций
9. Краевые задачи для уравнения Лапласа
10. Функция Грина задачи Дирихле
11. Задача Дирихле в круге
12. Формула Пуассона
13. Построение функции Грина с помощью метода отражений для задачи Дирихле
14. Конформная инвариантность уравнения Лапласа
15. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике
15. Асимптотическая символика
16. Метод Лапласа
17. Точная формула Лапласа
18. Формула Стирлинга
19. Метод стационарной фазы
20. Асимптотическое поведение волновой функции при больших временах 21. Метод перевала
22. Функция Эйри

23. Асимптотика собственных значений для задачи Штурма-Лиувилля
24. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля
25. Резольвента оператора Штурма -Лиувилля
26. Сингулярные задачи Штурма-Лиувилля
27. Дифференциальные уравнения в комплексной плоскости
28. Структура решений в окрестности изолированной особой точки
29. Правильная особая точка. Теорема Фукса
30. Уравнения класса Фукса
31. Символ Римана. Гипергеометрическое уравнение
32. Уравнения с правильными особыми точками
33. Уравнение Лежандра. Интеграл Шлефли
34. Поведение функции Лежандра в окрестности точки -1
35. Полиномы Лежандра
36. Обобщенное уравнение Лежандра (связь с уравнением Лежандра)
37. Присоединенные полиномы Лежандра
38. Теоремы о сферических функциях
39. Свойства сферических функций
40. Производящая функция для полиномов Лежандра. Функции Y_n
41. Краевые задачи для уравнения Лапласа
42. Асимптотическое поведение решений в окрестности неправильной особой точки
43. Метод Лапласа для получения интегрального представления
44. Асимптотическое поведение интегральных представлений
45. Уравнения Бесселя. Функция Бесселя
46. Функции Ханкеля
47. Связь функции Бесселя и функций Ханкеля
48. Функция Неймана
49. Краевая задача для уравнения Бесселя на конечном промежутке
50. Уравнение Гельмгольца (n=2). Задача о колебаниях круглой мембраны
51. Уравнение Гельмгольца (n=3). Задача о теплопроводном шаре
52. Фундаментальное решение для уравнения Гельмгольца (n=2)
53. Фундаментальное решение для уравнения Гельмгольца (n=3)
54. Краевая задача для уравнения Бесселя на полуоси
55. Уравнение параболического цилиндра. Уравнение Эрмита

5. Литература

5.1. Основная

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.III, части 1 и 2, Наука, Москва.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике, Наука, Москва.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Наука, Москва.
4. Шилов Г.Е., Гельфанд И.М. Пространства основных и обобщенных функций, М.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного, М., 1966.