ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет

Регистрационный номер
рабочей программы учебной дисциплины:

10	/	*ФЗ*	/	*106.2*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Методы математической физики (основной поток).

основных образовательных программ высшего профессионального образования
Прикладные математика и физика, Физика, Радиофизика

подготовки по направлению **010600** *Прикладные математика и физика*
010700 *Физика*
010800 *Радиофизика*

по профилю *по всем профилям*

для получения квалификации (степени) *бакалавр*

Рабочая программа учебной дисциплины может использоваться при совпадении значения трудоёмкости в зачётных единицах в одной или нескольких основных и дополнительных образовательных программах, характеристики которых указываются на титульном листе

код дисциплины	*106.2*	**по учебному плану**		**форма обучения**	*очная*

виды промежуточной аттестации: **зачётов** *2* **экзаменов** *2*

Трудоёмкость учебной дисциплины 11 **зачётных единиц**

Санкт-Петербург
2010

1.Организационно-методический раздел

1.1. Цель изучения дисциплины: формирование у студентов, обучающихся на физическом факультете, знаний о методах математической физики и умений решать практические задачи.
1.2. Задачи курса: обучение студентов основам теории функций комплексной переменной и ее приложений, теории обобщенных функций, асимптотических методов, а также методов решения классических краевых задач математической физики.
1.3. Место курса в профессиональной подготовке выпускника: курс служит фундаментальной основой при изучении всех теоретических и экспериментальных дисциплин по физике и математике, преподаваемых на физическом факультете.
1.4. Требования к уровню освоения дисциплины «Методы математической физики ».

- знать основные теоретические принципы теории функций комплексной переменной, теории обобщенных функций, асимптотических методов, а также методов решения классических краевых задач математической физики
- уметь применять эти принципы для решения задач

2. Объем дисциплины, виды учебной работы, форма текущего, промежуточного и итогового контроля

Время чтения лекций по дисциплине	5-6 семестр
Примерное число студентов	160 студентов
Всего аудиторных занятий	195 часов
Из них лекций	105 часов
Практические занятия	90 часов
Самостоятельная работа студентов	155 часов
Итого (трудоемкость дисциплины)	350 часов
Текущий контроль	Контрольные работы, коллоквиум в сроки, предусмотренные учебным планом, аттестация
Промежуточный контроль	Зачет, экзамен по изученному материалу всего курса в письменной форме в 5-м и 6-м семестре. Оценка за экзамен в обоих семестрах учитывает положительный результат коллоквиума и контрольных работ.
Итоговый контроль	Государственный экзамен по математике (для направления 010600 Прикладные математика и физика). Материал, выносимый на итоговый письменный экзамен, приведен в п. 4.3.

Правила проведения семинарских занятий, коллоквиума и экзамена, отчетность студентов

Самостоятельная работа студентов на семинарских занятиях, коллоквиуме и экзамене оценивается количеством набранных баллов. Предполагается, что преподаватели контролируют аккуратное следование этим правилам.

Практические занятия.

На практических занятиях за семестр студент может набрать до 50 баллов.
Участие в практических занятиях для студента является обязательным.

На контрольных студент может набрать до 45 баллов. Студентам запрещено использование конспектов, учебников, задачников, калькуляторов, телефонов и т. п. во время написания контрольных, экзаменационных работ, коллоквиума, т.е. работ, за которые выставляются баллы.

По результатам работы в семестре (за посещаемость, домашние задания, другие дополнительные работы и т. п.) студент может набрать до 5 баллов, которые выставляются по усмотрению преподавателя.

Контрольные работы проводятся в соответствии с планом практических занятий.

Проверка каждой контрольной работы должна быть проведена в течении 7 дней и результаты сразу переданы лектору основного потока, а студенты должны быть извещены о них.

Для получения зачета студент должен набрать 15 баллов за практические занятия.
Студенты, не получившие зачета, к экзамену не допускаются.

Для студентов, набравших за практические занятия 15 и более баллов, переписывания контрольных работ, проводимых в семестре, не устраиваются. Они получают зачет и допуск к экзамену.

После выполнения программы практических занятий преподаватель устраивает одну контрольную работу на 2 часа, содержащую любой материал, изучавшийся в семестре (не более чем на 12 баллов). Студенты, не имеющие зачета на момент проведения этой работы, т.е. 15 баллов, получают возможность увеличить суммарное число баллов, но не более чем до 19-ти (а, значит, могут получить всего 4 дополнительных балла свыше 15-ти). Остальные студенты получают возможность увеличить свой балл на сумму заработанных за эту работу, но не более чем на 5 дополнительных баллов свыше имеющихся. Преподаватель вправе отказать студенту, пропустившему более четверти практических занятий без уважительной причины (документы об уважительности пропусков подтверждаются деканатом), в получении дополнительных баллов за эту работу.

Студенты, пропустившие контрольные работы по уважительной причине (соответствующий документ заверяется в деканате), имеют право написать их по договоренности с преподавателем.

Устанавливается время, по распоряжению деканата и до начала экзаменационной сессии, для проведения единой зачетной работы для студентов, не получивших зачета (т.е. не набравших 15 баллов). Работа состоит из набора не более 6-и обязательных и типовых задач, а также не более чем 3-х теоретических вопросов, в соответствии с программой курса. Структура работы аналогична контрольной работе, проводимой в зачетную неделю, время - 2 академических часа. Работа проводится под контролем лектора потока, решение о зачете принимается комиссией и является окончательным. В случае положительного решения комиссии студент получает ровно 15 баллов и зачет.

Коллоквиум (письменная форма проведения, проводится в сроки, предусмотренные учебным планом)

На коллоквиуме студент может набрать до 25 баллов. Участие в коллоквиуме для студентов обязательно. Коллоквиум проходит в отведенное время, в течение 2-х часов. Выход из аудитории студентов в это время запрещен.

На коллоквиум или экзамен выносятся один или несколько вариантов равнозначных заданий, предлагаемых лектором потока или лицом его замещающим.

Билет коллоквиума могут составлять

2 теоретических вопроса, в соответствии с материалом, выносимым на коллоквиум (например, 4 и 1 балл соответственно),
1 задача из обязательных тем (4 балла),
1 задача с весом (6 баллов),
1 задача с весом (10 баллов).

Здесь и далее набор задач и вопросов, оценочные баллы за теоретические вопросы и задачи ориентировочны и могут быть изменены, в том числе, в соответствии с их реальной трудностью.

Теоретические вопросы и задачи из списка обязательных тем, включенных в коллоквиум, могут присутствовать в материале экзамена. Если студент не сдал коллоквиум, в том числе, по уважительной причине, то он имеет право сдать его во время экзамена, обратившись к экзаменатору и получив дополнительные задачи и теор. вопросы по материалу коллоквиума. При этом, время выделенное на экзамен не изменяется, оно достаточно для выполнения всех заданий, включая коллоквиум.

Аттестация

Перед коллоквиумом преподаватель проводит аттестацию студентов по десятибальной шкале. Результаты аттестации сообщаются лектору практического потока и в деканат. Эта оценка не учитывается при формировании общей оценки за курс и носит лишь ориентировочный характер.

Экзамен (письменная форма проведения)

На экзамен допускаются студенты, получившие зачет по семинарским занятиям (в частности, набравшие не менее 15 баллов за семинары) и имеющие отметку деканата в зачетной книжке о допуске к сессии.

На экзамене студент может набрать до 50 баллов. Билет экзамена, могут составлять

3 теоретических вопроса, составленных в соответствии с программой курса (например, 6, 3, 3 балла соответственно),
2 задачи из обязательных тем (4 балла каждая),
2 задачи с весом (5 баллов каждая),
2 задачи с весом (10 баллов каждая).

Итоговая оценка за курс в семестре выставляется по следующему правилу.

Оценка удовлетворительно ставится в сумме за:

Полный правильный ответ хотя бы на 1 теоретический вопрос.
Решенные в целом 2 обязательные задачи.
45--69 баллов, набранных в сумме за практику,
коллоквиум и экзамен.

(Наборы обязательных и типовых задач описаны в методическом пособии М.А. Лялинова и А.А. Пожарского.)

Оценка хорошо ставится в сумме за:

Полный правильный ответ хотя бы на 2 теоретических вопроса. Решенные в целом 2 обязательные задачи.
70--94 баллов, набранных в сумме за практику,
коллоквиум и экзамен.

Оценка отлично ставится в сумме за:

Полный правильный ответ хотя бы на 2 теоретических вопроса, один
из которых содержит требуемое доказательство.
Решенные в целом 2 обязательные задачи.
Не менее 95 баллов, набранных в сумме за практику,
коллоквиум и экзамен.

При успешной сдаче экзамена оценка в десятибалльной шкале выставляется в соответствии со следующей таблицей

Баллы	До 45	45-54	55-64	65-69	70-79	80-89	90-94	95-99	100-109	>109
болонск.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
оценка	«неуд.»	«удовлетворительно»			«хорошо»			«отлично»		

При решении спорных вопросов лектор имеет право на 5 бонусных баллов в пользу тех студентов, которые, например, аккуратно посещали лекционные и практические занятия.

Экзамен длится 4 часа с 15 мин. перерывом между 1-ой частью (2 часа) и 2-ой частью (2 часа).

Выход из аудитории во время экзамена запрещен. При необходимости процедура проведения экзамена (коллоквиума) может быть модифицирована. В результате сдачи экзамена студент может получить любую итоговую оценку.

После экзамена назначается время для объявления результатов экзамена и для того, чтобы студент, при необходимости, получил разъяснения лектора (или его помощников) на конкретные вопросы, касающиеся его экзаменационной работы. Несогласие студента с полученной оценкой не является основанием для ее изменения.

Если решение задачи (ответ на теор. вопрос) содержит ошибку (например, неверный результат), то соответствующий балл за задачу снижается вплоть до нулевого, что определяется экзаменатором, проверившим задачу. Как правило, задача (теор. вопрос) проверяется одним и тем же преподавателем у всех студентов потока. В неоднозначной ситуации окончательное решение об оценке задачи принимается экзаменатором по согласованию с лектором потока.

Повторная сдача экзамена.

Переэкзаменовке подлежат только студенты, получившие неудовлетворительные оценки, а также не явившиеся на первый экзамен или не допущенные к нему, но получившие допуск к переэкзаменовке. На повторных сдачах экзамена студент может получить любую оценку.

На первую переэкзаменовку выделяется 2 часа, работа может содержать

до 6 задач
до 3 теоретических вопросов, один из которых требует развернутых теоретических вычислений или доказательства.

Содержание работы соответствует программе курса. (Суммарная оценка заданий в работе 50 баллов, работа должна содержать не менее 2-х верно решенных задач и не менее 1 верного ответа на теор. вопросы.)

Письменная работа на переэкзаменовке с комиссией предусматривает 2 возможных варианта организации и может содержать

до 6-и типовых задач и
до 3-х теоретических вопросов, один из которых требует развернутых вычислений или доказательства (1-й вариант)

или

14 простых теоретических вопросов или простейших задач (2-й вариант).

Комиссия выделяет достаточное время для выполнения заданий, в соответствии с их сложностью, но не более 2-х часов. Комиссия вправе дополнительно пояснить свои требования и критерии оценки перед экзаменом, а также упростить набор заданий и уменьшить их количество, если посчитает целесообразным. Суммарная оценка заданий в работе 50 баллов.

При выставлении оценки за семестровый курс, комиссия принимает во внимание только те обстоятельства, которые сочтет существенными. (В том числе, результаты последней письменной экзаменационной работы. В первом варианте, учитывает количество правильно решенных задач - не менее 2-х, и верных ответов на теор. вопросы в ней - не менее 1-го, а также сумму баллов, набранных в итоге студентом. Во втором варианте -- не менее половины правильных ответов на вопросы и задачи, а также сумму баллов, набранных в итоге студентом). Решение комиссии принимается коллегиально, а оценка экзаменационной комиссии является окончательной.

3. Содержание дисциплины

3.1. Программа курса лекций по дисциплине:

5-й семестр (всего 45 часов, в середине семестра коллоквиум и в зимнюю сессию экзамен)

1. Аналитические функции и их применения

1.1 Аналитические функции.

Голоморфные функции, формула Коши. Комплексная плоскость: алгебраические и топологические структуры. Функции комплексной переменной, предел функции, непрерывность. Дифференцирование, условия Коши-Римана, геометрический смысл производной.

Регулярные (голоморфные) функции и их свойства, регулярность основных элементарных функций. Условия локальной обратимости голоморфной функции. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части, связь с гармоническими функциями. Контурный интеграл, теорема Коши, интегральная формула Коши, формула Коши для производных. Первообразная регулярных функций. Теорема Лиувилля. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Теорема Вейерштрасса о сумме ряда регулярных функций.

1.2 Ряды Тейлора и Лорана, изолированные особые точки.

Степенной ряд, круг сходимости. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Ряд Лорана, кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце. Изолированные особые точки, их классификация. Ряд Лорана в окрестности бесконечности, бесконечность как особая точка. Вычет, вычет в бесконечности, теорема о вычетах, вычисление вычетов в полюсах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента, теорема Руше. Целые и мероморфные функции. Разложение мероморфной функции в сумму простых дробей (простейший случай). Разложение ctg z в сумму простых дробей.

1.3 Аналитическое продолжение.

Теорема единственности для регулярных функций. Изолированность нулей регулярной функции. Аналитическое продолжение и его единственность. Теорема Римана об аналитическом продолжении через границу. Принцип симметрии. Римановы поверхности, точки ветвления и разрезы. Примеры: ln z и z^a. Интегралы с неоднозначными функциями.

1.4 Конформные отображения.

Конформное отображение и его связь с голоморфным. Принцип соответствия границ. Сфера Римана. Теорема Римана. Дробно-линейные отображения как автоморфизмы сферы Римана, комплексной плоскости, единичного круга. Применение конформных отображений к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Теоремы единственности для задач.

1.5 Специальные главы теории аналитических функций.

Гамма-функция, эйлеровы интегралы 1 и 2 рода, определения, связь с факториалом. Аналитические свойства. Интегральные представления.

1.6 Преобразование Лапласа.

Функции ограниченного роста. Область регулярности изображения, оригинал. Изображения производных и первообразных оригинала, теоремы запаздывания и смещения. Свертка оригиналов и ее изображение. Обращение преобразования Лапласа -- формула Меллина. Операционный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

2 . Обобщенные функции и их приложения

2.1 Обобщенные функции.

Линейные функционалы на пространствах пробных функций. Сингулярные и регулярные обобщенные функции. Дельта-функция Дирака. Локальные свойства обобщенных функций. Дельта-образные последовательности. Дифференцирование обобщенных функций. Производная разрывных функций. Деление на полином. Обобщенные функции нескольких переменных.

2.2 Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье и свертка обобщенных функций. Ряд Фурье обобщенных функций. Фундаментальное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Представление решений неоднородных уравнений. Представление фундаментального решения в терминах решения задачи Коши. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.

6-й семестр (всего 60 часов, в середине семестра коллоквиум и в летнюю сессию экзамен)

1. Асимптотические методы

1.1 Асимптотика интегралов Лапласа

1.1.1 Вклад от максимума на конце промежутка интегрирования.
1.1.2 Вклад от внутреннего максимума.
1.1.3 Формула Стирлинга для гамма-функции.

1.2 Асимптотика быстро осциллирующих интегралов.

1.2.1 Вклады от концов промежутка интегрирования.
1.2.2 Вклад от точки стационарной фазы.
1.2.3 Асимптотика функции Эйри на минус бесконечности.

1.3 Метод перевала

1.3.1 Общая схема метода. Геометрия линий наискорейшего убывания и линий наискорейших осциляций. Точки перевала.
1.3.2 Асимптотика функций Эйри на плюс бесконечности.
1.3.2 Случаи конечного и полубесконечного контуров интегрирования: примеры.
1.3.3 Вклады от точек ветвления и полюсов: примеры.

2. Исследование уравнений математической физики методом деления переменных.

2.1 Колебания конечной струны.

2.1.1 Постановка задачи, сведение к случаю однородных граничных условий.
2.1.2 Случай свободной струны: построение решения задачи Коши.
2.1.3 Вывод формул Даламбера из формул метода деления переменных: случай нулевых начальных скоростей. Конечность скорости распространения волн.
2.1.4 Вывод формул Даламбера из формул метода деления переменных: случай нулевого начального отклонения от положения равновесия.
2.1.5 Построение решения задачи Коши в случае ненулевой внешней силы. Пример.
2.1.6 Появление резонанса: пример.

2.2 Уравнение теплопроводности для одномерного стержня.

2.2.1 Построение решений задачи Коши для однородного уравнения.
2.2.2 Пример: распространение тепла в стержне, нагретом в одной точке. Бесконечность скорости распространения тепла для уравнения теплопроводности.
2.2.3 Стержень нагретый в точке:
Вывод формул метода отражений из формул метода деления переменных в случае. Предельный переход к случаю бесконечного стержня.

2.3 Колебания прямоугольной мембраны.

2.3.1 Постановка задачи. Переход к однородным граничным условиям.
2.3.2 Свободная мембрана: построение решения задачи Коши.
Собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике.
2.3.3 Колебания мембраны, к которой приложена внешняя сила.
2.3.4 Пример: возникновение параметрического резонанса.

2.4 Колебания круговой мембраны.

2.4.1 Постановка задачи. Переход к однородным граничным условиям.
2.4.2 Свободная мембрана: построение решения задачи Коши (задача, однородная по углу).
2.4.3 Сингулярная задача Штурма-Лиувилля.

2.5 Уравнение теплопроводности в круге и в цилиндре.

2.5.1 Уравнение теплопроводности в круге: пример «теплового взрыва».
2.5.2 Собственные значения оператора Лапласа в цилиндре.
2.5.3 Операторный подход: решение уравнения теплопроводности в цилиндре.
Пример «тепловой взрыв стержня».

2.6 Деление переменных в сферических координатах.

2.6.1 Построение функций, гармонических в R^3.
2.6.2 Собственные значения оператора Лапласа_Бельтрами. Присоединенные функции Лежандра. Сферические функции.

3.2. План практических занятий 5-й семестр (всего 45 часов, зачет), 6 -й семестр (всего 45 часов, зачет)

5 семестр

Примерный план практических занятий. (План составлен из расчета 15-ти 3-х часовых занятий.)

1. Регулярные функции. Комплексные числа.
Условия Коши-Римана. Восстановление регулярной функции по ее вещественной (мнимой) части.

2. Свойства регулярных функций.
Контурный интеграл от функции комплексного переменного.
Теорема Коши. Интегральная формула Коши (ИФК). Вычисление простейших интегралов с помощью ИФК. Ряды Тейлора элементарных функций.

3. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Нахождение главной части ряда Лорана функции в окрестности ее полюса.
4. 1-ая контрольная работа (1 час, 6 баллов), вычисление интегралов по замкнутому контуру. Вычисление вычетов функции. Теорема о вычетах. Вычисление интеграла

по замкнутому контуру. Вычисление интегралов от тригонометрических функций по периоду.

5. Вычисление интегралов по вещественной оси

Вычисление интеграла от рациональных функций по вещественной оси.
Вычисление интегралов, содержащих тригонометрические функции,
по вещественной оси.
Вычисление интегралов по вещественной оси от функций,
содержащих устранимые особенности на контуре интегрирования.

6. Многозначные функции

Однозначные ветви, аналитическое продолжение, точки
ветвления
Риманова поверхность простейших многозначных функций
Вычисление интегралов от многозначных функций
по полуоси (степенные и логарифмические особенности).

7. 2-ая контрольная работа, 2 ч., 12 баллов, вычисление интегралов от многозначных функций

8. Конформные отображения

Свойства конформных отображений. Теорема Римана
Отображения элементарными функциями
Дробно-линейные отображения.
Отображение круга на полуплоскость и т. п.
Отображение лунок.

9. 3-я контрольная работа, 1 ч., 7, баллов

преобразование Лапласа
Формула Меллина
Гамма-функция и ее аналитическое продолжение

10. Решение линейных дифференциальных уравнений
с помощью преобразования Лапласа

11. 4-я контр. работа, 1 ч., 8 баллов

Обобщенная производная, дельта-функция, дифференцирование скачков.
Регуляризация степенных особенностей.
Деление на полином.
Обобщенные решения дифференциальных уравнений со
степенными коэффициентами

12. Решение дифференциальных уравнений

Преобразование Фурье обобщенных функций. Свертка обобщенных функций.
Метод Фурье для решения ОДУ с постоянными коэффициентами
Фундаментальное решение ОДУ с постоянными коэффициентами.
Выражение фундаментального решения через решение задачи Коши.

13. Фундаментальные решения

Решение неоднородных уравнений с использованием фундаментального
решения. Метод Фурье для решения простейших ОДУ с постоянными
коэффициентами

Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.

14. Фундаментальные решения (продолжение)
Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля (продолжение).
Решение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля \ c \ использованием функции Грина.

15. 5-ая контрольная работа, 12 баллов (2 часа).
Подготовка к 5-ой контрольной работе (1 час),
решение задач

План подробно изложен в методических пособиях

М. А. Лялинов, А. А. Пожарский,
Методы математической физики в основном потоке в 5 семестре и система письменного экзамена, 2007.

М. А. Лялинов, А. А. Пожарский, Методы математической физики. Программа упражнений. 5 семестр, основной поток, Метод. пособие, 2007.

(одобрено методической комиссией и рекомендовано ученым советом факультета)

6-й семестр

Асимптотическое вычисление интегралов. Метод Лапласа и метод стационарной фазы

Метод перевала и вычисление асимптотики интегралов в более сложных случаях

Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Построение решений в виде рядов в окрестности регулярной точки. Правильные особые точки, построение решений в их окрестности

Продолжение темы занятия 3. Случай появления логарифма

Контрольная работа (2 часа). Примерное содержание: 2 задачи на вычисление асимптотики интегралов, 1 или 2 задачи по аналитической теории дифференциальных уравнений, один простой теоретический вопрос

Метод Лапласа для решений обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными коэффициентами

1 час - продолжение темы предшествующего занятия . Задача Штурма-Лиувилля на отрезке

Уравнение теплопроводности на отрезке. Уравнение колебаний ограниченной струны. Зависимость от времени в краевых условиях

1 час - продолжение темы предш. занятия . Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона в прямоугольной области

Контрольная работа - 1 час. 2 задачи и простой теор. вопрос:
решить уравнение с линейными коэффициентами, а также, например, разделение переменных на примере задачи из домашнего задания. 2-й час - уравнение Лапласа в кольцевой области.

Уравнение Лапласа в круге и в кольце

Уравнение колебаний прямоугольной мембраны

Разделение переменных в сферических и цилиндрических координатах.

Уравнение Лапласа в шаре и в R^3.

Контрольная работа - 2 часа. 3 задачи и 1 простой теор. вопрос.

3.3. Примеры обязательных задач

5 семестр.

Восстановить регулярную функцию по ее вещественной части.

Вычислить интеграл по замкнутому контуру от регулярной функции, имеющей изолированные особенности однозначного характера

Вычислить интеграл от рациональной функции по вещественной оси.

Разложить функцию в ряд Тейлора с центром в точке с заданной точностью.

Найти конформное отображение «луночки» на верхнюю полуплоскость.

Найти все особые точки функции и указать их тип.

Выделить однозначную регулярную ветвь функции.

Найти решение задачи Коши для ОД уравнения операторным методом.

Вычислить n-ю обобщенную производную функции.

Вычислить преобразование Фурье обобщенной функции.

6-й семестр

Найти асимптотику интеграла методом Лапласа или методом стационарной фазы.

Построить решение ОДУ в окрестности правильной особой точки, в окрестности точки регулярности.

Найти решение ОДУ с линейными коэффициентами методом интеграла Лапласа.

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности, волнового уравнения .

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге.

4. Вопросы к экзамену

4.1. Примерный перечень типовых вопросов к экзамену по курсу в 5 семестре

Предполагается, что формулировки конкретных вопросов на экзамене, коллоквиуме или контрольной работе могут отличаться по форме от ниже предложенных, хотя, в целом, содержание, уровень сложности и охват материала соответствует программе. Вопросы, содержащие доказательство, оцениваются на экзамене выше, чем вопросы, содержащие просто формулировки.

Дайте определение непрерывной функции в области комплексной плоскости.

Дайте определение регулярной функции в области.

Доказать, что регулярная функция в области удовлетворяет в этой области условиям Коши-Римана.

Объясните геометрический смысл комплексной производной регулярной функции.

Сформулируйте условие локальной обратимости регулярной функции. Формула для производной обратной функции.

Сформулируйте теорему Коши о независимости интеграла от пути интегрирования.

Можно ли в теореме Коши о независимости интеграла от пути интегрирования выбросить условие односвязности области. Если можно, объясните почему, если нет, приведите контр-пример.

Выпишите и поясните интегральную формула Коши и формулу Коши для производных.

Что такое ряд Лорана в проколотой окрестности точки, в кольце, в окрестности бесконечности?

Сформулируйте и докажите теорему Лиувилля и ее обобщенный вариант.

Сформулируйте и докажите теорему о среднем.

Сформулируйте и докажите принцип максимума для регулярных функций.

Сформулируйте теорему Вейерштрасса для суммы ряда регулярных функций.

Дайте классификацию изолированных особых точек функции.

Дайте определение вычета, в том числе на бесконечности.

Сформулируйте и докажите основную теорему о вычетах.

Сформулируйте и докажите лемму Жордана.

Сформулируйте и докажите принцип аргумента.

Сформулируйте и докажите теорему Руше.

Дайте определения целой и мероморфной функций.

Сформулируйте и докажите теорему единственности для регулярных функций.

Сформулируйте теорему Римана об аналитическом продолжении через границу.

Сформулируйте принцип симметрии.

Что такое конформное отображение?

Сформулируйте основные свойства дробно-линейных отображений.

Как преобразуется оператор Лапласа при конформных отображениях.
Приведите доказательство.

Дайте определение гамма-функции и сформулируйте ее основные
свойства.

Выпишите интегральные представления для гамма-функции.

Дайте определение преобразования Лапласа и выпишите формулу Меллина (с доказательством).

Дайте определение обобщенной функции.

Дайте определение дельта-функции Дирака и ее производных.

Дайте определение дельта-образной последовательности, сформулируйте и докажите основную теорему о сходимости.

Дайте определение преобразования Фурье и его обратного для обобщенной и основной функции.

Дайте определение свертки обобщенных функций.

Как связаны фундаментальное решение линейного дифференциального
уравнения и решение задачи Коши (с доказательством).

Функция Грина для задачи Штурма-Лиуввиля (с доказательством).

Выпишите и докажите формулы Сохоцкого.

Вычислите преобразование Фурье от функции Хевисайда.

Выведите формулу для преобразования Фурье свертки основных функций.

Докажите формулу для функции Грина в задаче Дирихле для оператора Лапласа на плоскости.

4.2 Примерный перечень типовых вопросов к экзамену по курсу в 6 семестре

Асимптотические оценки интегралов

Сформулируйте определение асимптотической последовательности. Приведите примеры.

Дайте определение асимптотического разложения (асимптотического ряда).

Выпишите старший член асимптотического разложения интеграла типа Лапласа, если функция $S(x)$ в показателе экспоненты не имеет точек, в которых $S'(x)=0$, на промежутке интегрирования.

Выпишите старший член асимптотики интеграла типа Лапласа в случае невырожденной точки максимума $S(x)$ внутри промежутка интегрирования.

Проведите соответствующее вычисление старшего члена асимптотики.

Проведите асимптотическую оценку интеграла в методе стационарной фазы и выпишите формулу для старшего члена асимптотики. Каков асимптотический вклад концов интегрирования?

Опишите основные идеи асимптотического вычисления соответствующего интеграла в методе перевала. Приведите формулу для старшего члена асимптотики.

Применяя метод Лапласа, выведите формулу Стирлинга.

Используя метод стационарной фазы, вычислите старший член асимптотики функции Эйри при аргументе, стремящемся к положительной бесконечности.

Приведите пример вычислений метода перевала в применении к интегралу Эйри. Выведите старший член асимптотики.

Приведите пример и проведите вычисления метода перевала для случая, когда подынтегральная функция имеет полюс, пересекаемый при деформации контура в перевальный.

Приведите пример и проведите вычисления метода перевала для случая, когда подынтегральная функция имеет точку ветвления, захватываемую при деформации контура в перевальный.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Метод Лапласа

Опишите структуру решений обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) в окрестности точки регулярности коэффициентов уравнения. Что можно сказать о сходимости соответствующего ряда?

Что такое правильная особая точка ОДУ второго порядка?

Какова структура решений ОДУ в окрестности правильной особой точки?
(Разность показателей нецелая.)
Как выглядит характеристическое уравнение для определения показателей?

Какова структура решений ОДУ в окрестности правильной особой точки?
(Разность показателей целая.)

Определите понятие правильной особой точки в бесконечности.

Постройте решение уравнения Бесселя с \nu=0 в окрестности z=0, не содержащее логарифма.

Постройте решение уравнения Бесселя с \nu=0 в окрестности z=0, содержащее слагаемое с логарифмом.

Постройте решение уравнения Лежандра, содержащее логарифм, в окрестности бесконечности.

Постройте методом Лапласа решения уравнения Эйри.

Постройте методом Лапласа специальные решения уравнения Эрмита -- полиномы Эрмита.

Исследование задач математической физики и метод разделения переменных

Сформулируйте регулярную задачу Штурма-Лиувилля на отрезке.

Опишите свойства собственных чисел и собственных функций
регулярной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке для симметричного оператора.

Сформулируйте начально-краевую задачу, описывающую колебания конечной струны.

Опишите процедуру разделения переменных на примере задачи о колебаниях конечной струны.

Напишите формулу Даламбера, дающую решение задачи Коши для бесконечной струны.
Сформулируйте эту задачу Коши.

Выведите формулу Даламбера с использованием решения начально-краевой задачи
для конечной струны со специальными начальными условиями типа "волнового пакета",
считая второе начальное условие нулевым.

Приведите пример начально-краевой задачи для уравнения струны и ее решение
для резонансного воздействия внешней силы на конечную струну.

Приведите пример начально-краевой задачи и процедуру ее решения для уравнения теплопроводности на отрезке с начальным условием в виде дельта-функции.

Продемонстрируйте предельный переход от задачи о начальном воздействии в виде дельта-функции для уравнения теплопроводности на отрезке к случаю бесконечного стержня.

Как связаны упомянутые решения задач с методом отражений источника?

Что понимается под корректностью начально-краевой задачи?

Опишите пример Адамара. Продемонстрируйте некорректность этой задачи.

Опишите метод разделения переменных на примере задачи о колебаниях прямоугольной мембраны с однородными краевыми условиями.

Решите начально-краевую задачу для однородного уравнения колебаний прямоугольной мембраны с нулевыми начальными условиями, с нулевыми краевыми условиями на двух кромках мембраны и условиями вида $U|_{x_2=1}=x_1\sin t$, $U|_{x_1=1}=x_2\sin t$ на двух других (см. пример из лекций).

Используйте решение задачи из предыдущего вопроса в виде ряда и продемонстрируйте возможность проявления параметрического резонанса в задаче.

Опишите постановку задачи для колебаний круговой мембраны. Редуцируйте ее к задаче с однородными граничными условиями.

В контексте метода разделения переменных для круговой мембраны сформулируйте сингулярную задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя. Перечислите свойства собственных чисел и собственных функций оператора этой задачи и докажите их.

Как строится решение начально-краевой задачи для круговой мембраны с неоднородными начальными
условиями, если известны соответствующие "нормальные моды" в задаче.

Опишите постановку начально-краевой задачи и построение "нормальных мод" для уравнения теплопроводности
в круге.

Зная "нормальные моды" в задаче о теплопроводности в круге, постройте ее решение и проанализируйте возможность описания явления "теплового взрыва".

Постройте "нормальные моды" в краевой задаче для оператора Лапласа в конечном круговом цилиндре с однородными условиями Дирихле на границе.

Решите начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в конечном круговом цилиндре.

Проанализируйте возможность возникновения теплового взрыва в цилиндрическом стержне.

В рамках метода разделения переменных опишите процедуру построения гармонических функций в R^3, считая собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на сфере известными.

Найдите спектр и собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на сфере S^2.

Выпишите присоединенное уравнение Лежандра и присоединенные полиномы Лежандра. Опишите их свойства.

Опишите классификацию уравнений второго порядка в частных производных.

4.3 **Примерный перечень вопросов к итоговому экзамену по математике**

1. Голоморфные функции. Условия Коши-Римана.
2. Теорема Коши, формула Коши.
3. Ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Вычеты. Теорема о вычетах.
5. Асимптотическое вычисление интегралов. Метод Лапласа.
6. Метод стационарной фазы.
7. Обобщенные функции, примеры регулярных и сингулярных обобщенных функций.
8. Дифференцирование обобщенных функций, примеры.
9. Преобразование Фурье обобщенных функций.
10. Волновое уравнение в одномерном пространстве. Задача Коши, функция Грина.
11. Волновое уравнение в трехмерном пространстве. Задача Коши, функция Грина.
12. Неоднородное уравнение теплопроводности на конечном интервале. Метод Фурье.
13. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, однородного и неоднородного. Теоремы существования (без доказательства). Теоремы единственности (для внутренних задач).
14. Функция Грина внутренней задачи Дирихле.
15. Полиномы Лежандра.
16. Сферические функции.
17. Разделение переменных в краевых задачах для уравнения Лапласа в шаре.
18. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя.
19. Собственные функции, собственные значения спектральной задачи Дирихле. Колебания круглой мембраны.

5. Основная литература

Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, Лекции по ТФКП Наука, Москва, (1982).

Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович, Сборник задач по ТФКП, Физ. Мат. ГИЗ, 1975.

В.С. Владимиров и др., Сборник задач по уравнениям математической физики, М., Наука, 1974.

М. А. Евграфов, К. А. Бежанов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, Сборник задач по теории аналитических функций, Наука, Москва, (1972).

М. А. Лялинов, А. А. Пожарский, Методы математической физики в основном потоке в 5 семестре и система письменного экзамена. Метод. пособие, 2007.

М. А. Лялинов, А. А. Пожарский, Методы математической физики. Программа упражнений. 5 семестр, основной поток, Метод. пособие, 2007.

6. Дополнительная литература

Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, Т. 1 Наука, Москва, (1985).

А. Г. Аленицын, А. С. Благовещенский, М. А. Лялинов, В. В. Суханов, Методы математической физики (Сборник задач для студентов 3-го курса). http://math.nw.ru.grikurov/3курс.html

Процедура разработки и утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Разработчик(и) рабочей программы учебной дисциплины

Фамилия, имя, отчество	Учёная степень	Учёное звание	Должность	Контактная информация (служебный адрес электронной почты, служебный телефон)
Буслаев Владимир Савельевич	д.ф.-м.н	профессор	профессор	
Лялинов Михаил Анатольевич	д.ф.-м.н	доцент	профессор	

В соответствии с порядком организации внутренней и внешней экспертизы образовательных программ, установленных приказом первого проректора по учебной работе от 18.02.2009 № 195/1, проведена двухуровневая экспертиза:

первый уровень (оценка качества содержания программы и применяемых педагогических технологий)		
Наименование кафедры	Дата заседания	№ протокола
Кафедра Высшей математики и математической физики	06.10.2010	№ 2
Кафедра Квантовой механики	15.10.2010	№ 7
второй уровень (соответствие целям подготовки и учебному плану образовательной программы)		
Экспертиза второго уровня выполнена в порядке, установленном приказом		
должностное лицо	*дата приказа*	*№ приказа*
Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа
Методическая комиссия	22.10.2010	протокол №3

Иные документы об оценке качества рабочей программы учебной дисциплины

Документ об оценке качества	Дата документа	№ документа

Утверждение рабочей программы учебной дисциплины

Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа
Ученый Совет физического факультета	26.10.2010	протокол №3

Внесение изменений в рабочую программу учебной дисциплины

Уполномоченный орган (должностное лицо)	Дата принятия решения	№ документа