Печатается по решению Ученого совета физического факультета

Рецензент: М.С. Фриш, доцент, к.ф.-м.н.

В.Г.Мишаков, Т.Л. Ткаченко
Решение задач по физике (Распределения Максвелла и Больцмана), – СПб., 2008, -32 с.

Данное методическое пособие обобщает опыт преподавания общей физики авторами на дневном и вечернем отделении физического факультета СПбГУ. Оно содержит примеры решения задач по теме "Молекулярно-кинетическая теория. Распределение Максвелла и Больцмана." Необходимо отметить, что понятие скоростного и энергетического распределения частиц играет фундаментальную роль в атомной и молекулярной физике. Для изучения, понимания и применения этих закономерностей необходимо массированное решение задач по этой теме. другим разделам курса. Пособие имеет целью максимально упростить работу студента по освоению материала, оно составлено с расчетом на широкий диапазон подготовленности студента. К математической подготовке предъявляются самые скромные требования, все основные формулы приведены во "Введении". Все предлагаемые задачи можно решить, не обращаясь к учебникам и справочникам, однако предварительное изучение предмета абсолютно необходимо. В конце пособия приводятся проверочные тесты на степень усвоения материала. На сайте физического факультета выложена электронная версия пособия. Кроме того решения некоторых задач представлены в виде слайдов в среде "Power Point".

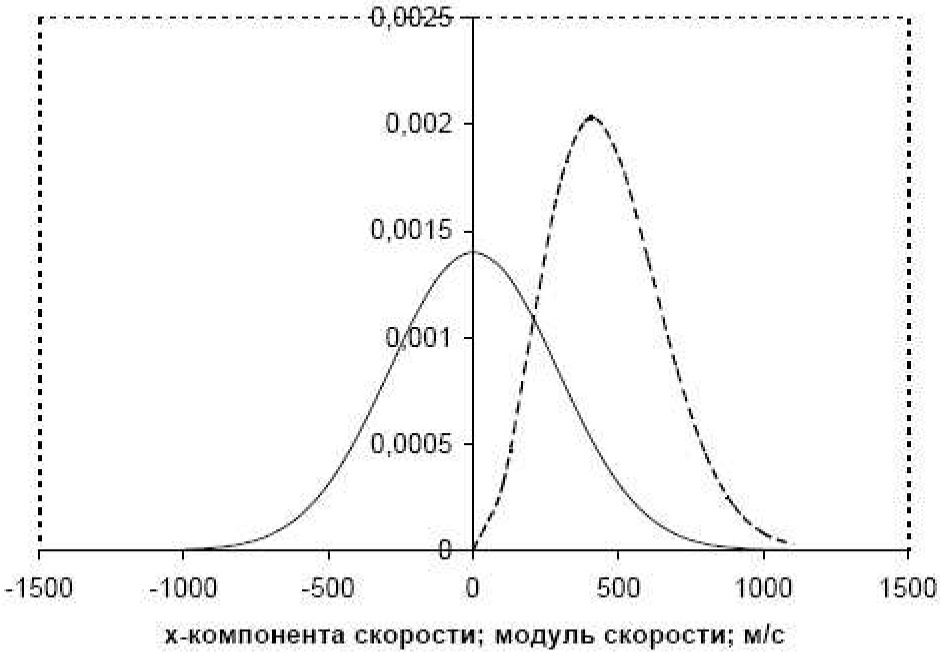
Введение. Основные законы и формулы

Во всех задачах данного пособия речь идет об идеальном газе. Если не оговорено иначе, то распределение частиц по скоростям - Максвелловское.

По умолчанию во всех задачах используются следующие обозначения:
m - масса частиц (молекул),
T - температура газа,
n - концентрация частиц,
N - общее число частиц в объеме,
p - давление газа,
V - объем, занимаемый газом,
v - абсолютная скорость частиц,
v_x - проекция скорости частицы на ось x (x-компонента вектора скорости),
ε - кинетическая энергия частиц,
g - ускорение свободного падения,
M - молярная масса,
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана,
$R = 8,314$ Дж/(моль·К) - молярная газовая постоянная,
$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ - число Авогадро,
$V_m = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль - молярный объем идеального газа при нормальных условиях ($T = 273,15$ К, $p = 101325$ Па),
$N_L = 2,69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ - число Лошмидта, равное N_A/V_m.
При численном решении задач, как правило, используется система СИ. Энергия в ряде случаев выражается в электронвольтах (1 эВ = 1,6·10^{-19} Дж.) Температура также может выражаться в энергетических единицах, исходя из соотношения $< \varepsilon >= 3kT/2$. В этом случае при температуре газа 7780 К средняя энергия частиц составляет 1 эВ.
Процесс дифференцирования и интегрирования простых функций в приведенных решениях опущен. Во введении приведена сводка значений некоторых определенных гауссоподобных интегралов.

Максвелловские функции распределения частиц по скоростям

Если выделить в пространстве некоторое направление (заданное, например, осью x), то число частиц, x-компонента скорости которых находится



[h]

Рис. 1: Максвелловские функции распределения; для x-компоненты скорости - сплошная кривая слева, по модулю скорости - пунктир справа (аргон, $T = 400$ K)

в интервале dv_x, можно представить в виде:

$$dN_{dv_x} = N\varphi_{v_x}dv_x, \tag{1}$$

где φ_{v_x} - четная функция, нормированная на единицу, монотонно убывающая с ростом модуля v_x.

$$\varphi_{v_x} = \frac{dN_{dv_x}}{Ndv_x}\,, \tag{2}$$

функция φ_{v_x} имеет смысл вероятности нахождения проекции скорости частицы в заданном скоростном интервале, отнесенной к величине этого интервала, т.е. плотности вероятности.
Аналитический вид этой функции и был найден Максвеллом (Рис. 1):

$$\varphi_{v_x} = (m/2\pi kT)^{1/2}\exp(-mv_x^2/2kT), \tag{3}$$

Полезно представлять себе трехмерное пространство скоростей с координатами v_x, v_y, v_z, тогда каждая частица отображается в этом пространстве скоростной точкой, а число частиц dN, имеющих скорости в заданном малом интервале скоростей будет равно числу скоростных точек, попадающих в соответствующий элементарный объем пространства скоростей $d\omega$.

$$dN_{d\omega} = Nf_v d\omega. \tag{4}$$

В простейшем случае элементарный объем в пространстве скоростей имеет форму параллелепипеда $d\omega = dv_x dv_y dv_z$,

$$dN_{dv_x, dv_y, dv_z} = Nf_v dv_x dv_y dv_z, \tag{5}$$

а вероятность того, что частица имеет скорость в заданном интервале равна:

$$\frac{dN_{dv_x, dv_y, dv_z}}{N} = \frac{dN_{dv_x}}{N} \frac{dN_{dv_y}}{N} \frac{dN_{dv_z}}{N} = \varphi_{v_x} \varphi_{v_y} \varphi_{v_z} dv_x dv_y dv_z. \tag{6}$$

Здесь dN_{dv_x, dv_y, dv_z} - число частиц, x - компонента скорости которых лежит в интервале от v_x до $v_x + dv_x$, y - компонента в интервале от v_y до $v_y + dv_y$, а z - компонента в интервале от v_z до $v_z + dv_z$. N - общее число частиц в рассматриваемом объёме сосуда. Сравнивая (5) и (6) , имеем:

$$f_v = \varphi_{v_x} \varphi_{v_y} \varphi_{v_z},$$

$$f_v = (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT). \tag{7}$$

Наибольший практический интерес представляет функция распределения частиц по абсолютной величине скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. В этом случае нас интересуют те частицы, скоростные точки которых попадают в элементарный объем между сферами радиусов v и $v + dv$ соответственно. Количество таких частиц в объеме обозначим, как dN_{dv}. При этом $d\omega$ в пространстве скоростей превращается в объем шарового слоя $d\omega = 4\pi v^2 dv$. В этом случае формула (4) приобретает вид:

$$dN_{dv} = Nf_v d\omega = Nf_v 4\pi v^2 dv = NF_v dv, \tag{8}$$

где F_v - Максвелловская функция распределения частиц по модулю скорости (Рис. 1, пунктирная кривая справа).

$$F_v = 4\pi v^2 (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT). \tag{9}$$

"Приведенный" вид Максвелловской функции распределения частиц по скоростям

Максвелловскому распределению по скоростям можно придать вид (см. задачу 7):

$$F_u = (4/\sqrt{\pi}) u^2 \exp(-u^2), \tag{10}$$

где $u = v/v_{ver}$, $v_{ver} = \sqrt{2kT/m}$.
График функции F_u приведен на Рис. 2. Число молекул dN_{du}, имеющих относительную скорость u в интервале от u до $u + du$, равно

$$dN_{du} = NF_u du. \tag{11}$$

Функция F_u, как и все функции распределения по скоростям и энергиям нормирована на единицу.

$$\int_0^\infty F_u du = \int_0^\infty (4/\sqrt{\pi}) u^2 \exp(-u^2) = 1. \tag{12}$$

При решении задач часто возникает необходимость вычисления интеграла

$$\Psi(x) = \int_0^x (4/\sqrt{\pi}) u^2 \exp(-u^2) du. \tag{13}$$

Взятие этого интеграла по частям приводит у формуле:

$$\Psi(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du. \tag{14}$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства есть так называемая функция ошибок $erf(x)$, а первое слагаемое производная от нее, помноженная на $-x$. В итоге равенство (14) приобретает вид:

$$\Phi(x) = -x \frac{d}{dx} erf(x) + erf(x). \tag{15}$$

О вычислении функции $erf(x)$ см. ниже (формулы (29) и (30)).

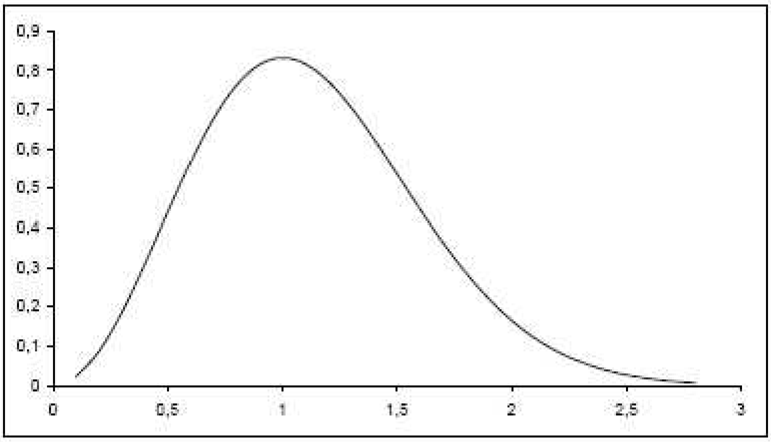


Рис. 2: Максвелловская функция распределения в "приведенном" виде (на горизонтальной оси отложены относительные значения скорости v/v_{ver})

Максвелловская функция распределения частиц по энергиям (Рис. 3)

$$F_\varepsilon = 2\pi(\pi kT)^{-3/2}\exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon}. \tag{16}$$

Соответственно число молекул в энергетическом диапазоне $d\varepsilon$ есть

$$dN_{d\varepsilon} = NF_\varepsilon d\varepsilon \tag{17}$$

Число ударов молекул газа о единицу поверхности стенки за единицу времени

$$z = n < v > /4, \tag{18}$$

где n - концентрация молекул, $< v >$ - их средняя скорость.

Уравнение состояния идеального газа

$$p = nkT \tag{19}$$

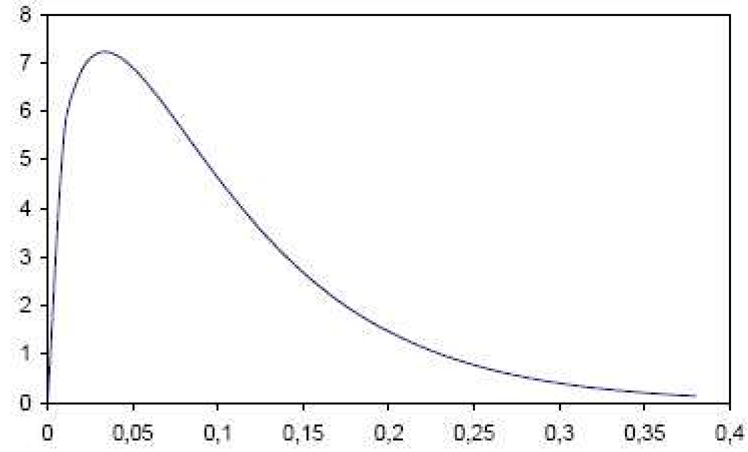


Рис. 3: Максвелловская функция распределения молекул идеального газа по энергиям для температуры 778 К (по горизонтальной оси отложены значения энергии в эВ)

Распределение Больцмана

Если частицы находятся в потенциальном поле силы $\overrightarrow{F}$, то отношение концентрации частиц, обладающих потенциальной энергией U к концентрации частиц, обладающих нулевой потенциальной энергией, дается формулой Больцмана:

$$n/n_0 = exp(-U/kT). \tag{20}$$

U - равняется с обратным знаком работе силы поля по переводу частицы в это состояние из состояния с нулевой потенциальной энергией. В частном случае гравитационного поля потенциальная энергия молекулы вблизи поверхности Земли $U = mgh$. С учетом $p = nkT$ для изотермической атмосферы получаем барометрическую формулу:

$$p = p_0 \exp(-mgh/kT) = p_0 \exp(-Mgh/RT), \tag{21}$$

где p - давление на высоте h, M - молярная масса, R - газовая постоянная.

В случае дискретных уровней распределение Больцмана имеет вид:

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right), \tag{22}$$

где g_1 и g_2 - кратности вырождения соответствующих уровней (статистические веса).

Некоторые полезные интегралы

Для положительных r

$$\int_0^\infty exp(-r^2v^2)dv = \sqrt{\pi}/2r, \tag{23}$$

$$\int_0^\infty v\exp(-r^2v^2)dv = 1/2r^2, \tag{24}$$

$$\int_0^\infty v^2\exp(-r^2v^2)dv = \sqrt{\pi}/4r^3, \tag{25}$$

$$\int_0^\infty v^3\exp(-r^2v^2)dv = 1/2r^4, \tag{26}$$

$$\int_0^\infty v^4\exp(-r^2v^2)dv = 3\sqrt{\pi}/8r^5, \tag{27}$$

$$\int_0^\infty v^5\exp(-r^2v^2)dv = 1/r^6. \tag{28}$$

Ниже приводится также

"Таблица значений интеграла вероятностей Лапласа"

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2/2)dt, \qquad 0 \le \Phi(x) \le 1 \tag{29}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,000	0,75	0,547	1,50	0,866	2,25	0,976	3,00	0,997
0,05	0,040	0,80	0,576	1,55	0,879	2,30	0,979	3,10	0,998
0,01	0,080	0,85	0,605	1,60	0,890	2,35	0,981	3,20	0,999
0,15	0,119	0,90	0,632	1,65	0,901	2,40	0,984	3,30	0,999
0,20	0,159	0,95	0,658	1,70	0,911	2,45	0,986	3,40	0,999
0,25	0,197	1,00	0,683	1,75	0,920	2,50	0,988	3,50	0,999
0,30	0,236	1,05	0,706	1,80	0,928	2,55	0,989	3,60	1,000
0,35	0,274	1,10	0,729	1,85	0,936	2,60	0,991	3,70	1,000
0,40	0,311	1,15	0,750	1,90	0,943	2,65	0,992	3,80	1,000
0,45	0,347	1,20	0,770	1,95	0,949	2,70	0,993	3,90	1,000
0,50	0,383	1,25	0,789	2,00	0,954	2,75	0,994	4,00	1,000
0,55	0,418	1,30	0,806	2,05	0,960	2,80	0,995	4,10	1,000
0,60	0,451	1,35	0,823	2,10	0,964	2,85	0,996	4,20	1,000
0,65	0,484	1,40	0,839	2,15	0,968	2,90	0,996	4,40	1,000
0,70	0,516	1,45	0,853	2,20	0,972	2,95	0,997	4,50	1,000

Часто интеграл вероятностей представляют в виде:

$$erf(x) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)dt, \qquad 0 \leq erf(x) \leq 1. \tag{30}$$

В таком виде интеграл вероятностей или функция ошибок затабулирован, например, в "Пятизначных математических таблицах" Б.И.Сегала и К.А.Семендяева (издание третье, ФМ, Москва, 1962). Можно также обратиться к электронным онлайновым калькуляторам специальных функций (Special Function Calculator). Между $erf(x)$ и $\Phi(x)$ легко просматривается связь:

$$erf(x) = \Phi(\sqrt{2}x). \tag{31}$$

Далее в разделах 1-26 "Пособия" предлагаются типичные задачи, решения которых основывается на приведенных формулах, а разделы 27-30 представляют из себя контрольные тесты на степень усвоения рассматриваемого материала.

1

Найти среднее значение модуля скорости молекул в газе $< v >$.

Решение.
Для нахождения среднего значения скорости молекул необходимо просуммировать значения скоростей всех молекул и разделить на число частиц. В нашем случае,когда это число чрезвычайно велико, имеет смысл разбить все молекулы на достаточно большое число групп с близкими скоростями. Тогда в некотором приближении

$$< v >\approx \frac{\sum_{i=1}^{k} v_i \Delta N_i}{N}, \tag{1.1}$$

где k - число групп разбиения, v_i - скорость, приписываемая всем молекулам группы, ΔN_i - число молекул в группе.
Увеличивая число групп разбиения в пределе получаем:

$$< v >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v dN}{N}. \tag{1.2}$$

Аналогично для любой характеристики x, зависящей от скорости,

$$< x >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(v) dN}{N}. \tag{1.3}$$

Здесь N - общее число частиц , а $x(v)$, как уже указывалось, любая переменная, зависящая от скорости (например, кинетическая энергия, импульс, доплеровский сдвиг и том числе сама скорость и ее степени).В нашем случае Максвелловского распределения для модуля скорости

$$dN = NF_v dv, \tag{1.4}$$

F_v дается формулой (9) из "Введения" и формула (1.2) приобретает вид:

$$< v >= 4\pi(m/2\pi kT)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 \exp(-mv^2/2kT) dv. \tag{1.5}$$

Используя для взятия интеграла формулу (26), получаем *ответ:*

$$< v >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \tag{1.6}$$

2

Найти средние значения обратной величины скорости $< 1/v >$, среднюю квадратичную скорость $\sqrt{< v^2 >}$ и среднее значение куба скорости $< v^3 >$ в предположении, что распределение молекул по скоростям подчиняется закону Максвелла.

Решение:
Искомые величины в этом случае находятся по формуле (1.3), которая в первом случае сводится к интегралу (24), а во втором и третьем к формулам (27) и (28).

Ответ: $< 1/v >= \sqrt{2m/\pi kT} = 4/\pi < v >$, $< v^2 >= 3kT/m$.

3

Определить среднее число молекул $dN_\perp$, у которых модули составляющих скорости , перпендикулярных к некоторому направлению, лежат в интервале $[v_\perp, v + v_\perp]$.

Решение:
Сначала найдем среднее число молекул, компоненты скоростей которых, параллельные некоторой оси, лежат в интервале $[v_{\shortparallel}, v_{\shortparallel} + dv_{\shortparallel}]$, а модули перпендикулярной составляющей скорости заключены между $[v_\perp, v_\perp + dv_\perp]$.

Число молекул, скорости которых лежат в указанном интервале, будет пропорционально величине этого интервала. В данном случае этот интервал в пространстве скоростей будет представлять собой объем кольцевого цилиндра, высота которого равна $dv_{\shortparallel}$, а кольцевой зазор - $dv_\perp$. Тогда объем такого цилиндра будет $2\pi v_\perp dv_\perp dv_{\shortparallel}$, и в соответствии с формулой (4) "Введения"

$$dN = Nf_v 2\pi v_\perp dv_\perp dv_{\shortparallel}. \tag{3.1}$$

Учитывая это, имеем :

$$dN = N(m/2\pi kT)^{3/2}\exp(-mv^2/2kT)2\pi v_\perp dv_\perp dv_{\shortparallel}, \tag{3.2}$$

где $v^2 = v_{\shortparallel}^2 + v_\perp^2$.
Теперь, чтобы ответить на вопрос, поставленный в условии задачи, необходимо проинтегрировать выражение (3.3) по параллельной компоненте скорости от $-\infty$ до ∞:

$$dN_\perp = N(m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv_\perp^2/2kT) 2\pi v_\perp dv_\perp \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-mv_{\shortparallel}^2/2kT) dv_{\shortparallel}. \tag{3.3}$$

Вычислив интеграл по формуле (23) "Введения", окончательно имеем *ответ*:

$$dN_\perp = N(m/kT) \exp(-mv_\perp^2/2kT) v_\perp dv_\perp. \tag{3.4}$$

4

По оси откаченной цилиндрической трубки натянута тонкая нить, разогретая до $T = 1000$ К. Считая, что скорости имитируемых электронов распределены по закону Максвелла (при той же температуре T), найти долю электронов α, достигающих стенки, если она находится под задерживающим потенциалом V относительно нити, равным 0,1 В.

Решение:
Т.к. условием преодоления задерживающего потенциала является соотношение

$$\frac{mv_\perp^2}{2} = eV\,, \tag{4.1}$$

то достигнуть стенки смогут только те электроны, у которых $v_\perp > \sqrt{2eV/m}$. Тогда из решения предыдущей задачи следует, что в соответствии с формулой (3.4) их число $dN_\perp$ равно:

$$N_\perp = N(m/kT) \int_{\sqrt{2eV/m}}^{\infty} \exp(-mv_\perp^2/2kT) v_\perp dv_\perp\,, \tag{4.2}$$

а их доля α, равная отношению $N_\perp/N$, есть:

$$\alpha = (m/kT) \int_{\sqrt{2eV/m}}^{\infty} \exp(-mv_\perp^2/2kT) v_\perp dv_\perp. \tag{4.3}$$

Окончательно получаем:

$$\alpha = \exp\left(-\frac{eV}{kT}\right). \tag{4.4}$$

Ответ: $\alpha = \exp(-1,16) = 0,31 = 31\%$.

5

Для одного моля аргона при температуре 300 K найти:
а) сумму $x-$ компонент скоростей всех молекул,
б) сумму скоростей всех молекул $\sum \vec{v}$,
в) сумму модулей скоростей всех молекул $\sum v$,
г) сумму модулей импульсов всех молекул $P = \sum m_{Ar} v$.

Решение:
В случае а) и б) в силу изотропности функции распределения соответствующие суммы равны нулю, в) $\sum v = N_A < v >= 2,40 \cdot 10^{26}$ м/с, в) $P = N_A m_{Ar} < v >= M_{Ar} < v >= 16$ кг·м/с.

6

Определить для Максвелловского распределения (9) наиболее вероятное значение скорости v_{ver}, соответствующее максимуму функции распределения.

Решение:
Наиболее вероятная скорость легко находится дифференцированием формулы (9) по скорости с последующим приравниванием нулю полученного выражения.

$$8\pi v_{ver}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{mv_{ver}^2}{2kT}\right)-8\pi v_{ver}^3\frac{m}{2kT}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{mv_{ver}^2}{2kT}\right)=0. \tag{6.1}$$

Отсюда находим,

$$v_{ver} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \tag{6.2}$$

7

а) Выражая скорость частиц с помощью безразмерной относительной величины u, равной отношению абсолютной скорости к ее наиболее вероятному значению v_{ver},

$$u = v/v_{ver}, \tag{7.1}$$

получить функцию распределения Максвелла по скоростям в "приведенном" виде.
б) С помощью полученного приведенного вида функции распределения найти долю частиц α, обладающих скоростями меньшими, чем v_{ver}.

Решение:
а) Обозначим искомую функцию распределения по относительным скоростям, как F_u. Из (7.1) следует соотношение между диффереციально малыми интервалами dv и du.

$$du = \sqrt{\frac{m}{2kT}}\, dv. \tag{7.2}$$

Так как число частиц, обладающих скоростями в соответствующих интервалах dv и du одинаково, то

$$F_v dv = F_u du. \tag{7.3}$$

Отсюда, используя соотношения (9), (7.1), (7.2), получаем функцию распределения Максвелла в приведенном виде.

$$F_u = (4/\sqrt{\pi})u^2 \exp(-u^2) \tag{7.4}$$

Видно, что функция F_u, описывающая распределение частиц по относительным скоростям u, не содержит параметра T. Такой вид функции распределения по скоростям является универсальным, не зависящим от температуры газа.
б) Как отмечалось выше:

$$dN_{du} = NF_u du. \tag{7.5}$$

И, соответственно, число частиц, относительные скорости u которых находятся в диапазоне от u_1 до u_2, равно:

$$\triangle N_{u_1,u_2} = N\int_{u_1}^{u_2} F_u du. \tag{7.6}$$

В нашем случае число частиц в заданном интервале скоростей есть:

$$\triangle N_{0,1} = N\int_{0}^{1} F_u du, \tag{7.7}$$

а искомая доля α равна

$$\alpha = \frac{\triangle N_{0,1}}{N} = \int_{0}^{1} F_u du = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1} u^2 \exp(-u^2) du. \tag{7.8}$$

Представим это выражение в виде:

$$\alpha = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1} u\, d(\exp(-u^2)), \tag{7.9}$$

в результате интегрирования по частям имеем:

$$\alpha = -\frac{2}{e\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1} \exp(-u^2) du. \tag{7.10}$$

Подставляя численные значения, имеем:

$$\alpha = -0,41 + erf(1) = -0,41 + \Phi(\sqrt{2}). \tag{7.11}$$

Воспользовавшись таблицей (см. "Введение") интеграла $\Phi(x)$, получаем:

$$\alpha \approx 0,43 \tag{7.12}$$

Полученный результат справедлив для любой температуры. Подобным образом можно найти число частиц, скорости которых лежат в любом заданном интервале относительных скоростей.

8

Получить с помощью функции F_v функцию распределения молекул идеального газа по энергиям F_ε. Найти среднее и наиболее вероятные значения энергии молекул. Соответствует ли наиболее вероятное значение ε_{ver} наиболее вероятной скорости v_{ver} ?

Решение:
В задаче предлагается вывести соотношение (16) из "Введения". Запишем для идеального газа соотношение между выбранным дифференциально малым интервалом скорости dv и соответствующем ему интервалом энергии $d\varepsilon$. Так как,

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}; \quad \text{то} \quad d\varepsilon = mvdv \tag{8.1}$$

Очевидно, что число молекул, имеющих энергию и скорость в этих интервалах одинаково, и в соответствии с (8) и (17) имеем:

$$NF_v dv = NF_\varepsilon d\varepsilon. \tag{8.2}$$

Отсюда:

$$F_\varepsilon = \frac{F_v dv}{d\varepsilon} = 4\pi v^2 (m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT) \frac{dv}{d\varepsilon}. \tag{8.3}$$

Извлекая v^2 и $dv/d\varepsilon$ из (8.1) окончательно получаем.

$$F_\varepsilon = 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon}. \tag{8.4}$$

Среднее значение энергии молекул находится как и в задаче 1 по формуле:

$$d\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon dN_{d\varepsilon}}{N}. \tag{8.5}$$

Подставляя $dN_{d\varepsilon}$ из (17) имеем:

$$< \varepsilon >= \int_0^\infty \varepsilon F_\varepsilon d\varepsilon. \tag{8.6}$$

Используя полученный вид максвелловского распределения по энергиям 8.4 получим:

$$< \varepsilon >= 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \int_0^\infty \varepsilon \exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \tag{8.7}$$

Заменой переменной (например ε на ξ^2) полученный интеграл можно свести к виду (27) и убедиться, что

$$< \varepsilon >= \frac{3}{2} kT. \tag{8.8}$$

Эта процедура нахождения $< \varepsilon >$ проделана нами исключительно с целью демонстрации общего подхода к нахождению средних значений величин по их функции распределения. В нашем случае можно было с тем же результатом просто воспользоваться очевидным соотношением:

$$< \varepsilon >= \frac{m}{2} < v^2 > . \tag{8.9}$$

Что касается второго вопроса задачи, то он сводится к нахождению максимума функции F_ε. Предлагаем самостоятельно убедиться, что

$$\varepsilon_{ver} = kT/2 \neq \varepsilon(v_{ver}). \tag{8.10}$$

Примечание:
Тот факт, что наиболее вероятное значение энергии равно $kT/2$ хорошо просматривается на Рис. 3. На нем график функции распределения построен для температуры 778 К, что соответствует среднему значению энергии частиц 0,1 эВ. Видно, что максимум функции приходится на значение энергии 0,033 эВ. (Измерение температуры в электронвольтах широко практикуется в физике плазмы.)

9

Определить значение энергии ε_1, для которого число частиц N_1 с энергией меньшей, чем ε_1, равно числу частиц N_2, с энергией большей, чем ε_1.

Решение:
В соответствии с формулами (16) и (17) "Введения"

$$N_1 = N \int_0^{\varepsilon_1} 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon, \tag{9.1}$$

и

$$N_2 = N \int_{\varepsilon_1}^{\infty} 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \tag{9.2}$$

Так как $N_1/N_2 = 1$, то

$$1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_1} 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{1 - \int_0^{\varepsilon_1} 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}. \tag{9.3}$$

Из чего следует, что

$$\int_0^{\varepsilon_1} 2\pi(\pi kT)^{-3/2}\exp(-\varepsilon/kT)\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = 0,5. \tag{9.4}$$

Заменой переменной ε на kTu^2 уравнение (9.4) можно свести к виду:

$$0,5 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{kT}}} u^2 \exp\left(-u^2\right) du. \tag{9.5}$$

Интеграл в правой части может быть преобразован по формулам (14) и (15), и получившееся уравнение нетрудно решить, пользуясь значениями фукции $erf(x)$ и ее производной.

10

По аналогии с задачей 7 получить Максвелловскую функцию распределения частиц по энергиям в "приведенном виде" , т.е. выражая энергию частиц с помощью безразмерной относительной величины ϵ, равной отношению энергии частицы к ее наиболее вероятному значению ε_{ver},

$$\epsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ver}}. \tag{10.1}$$

Решение:
Обозначим искомую функцию распределения по относительным энергиям, как F_ϵ. Из (10.1) следует соотношение между диффереციально малыми интервалами $d\epsilon$ и $d\varepsilon$.

$$d\epsilon = \frac{2}{kT}d\varepsilon. \tag{10.2}$$

Так как число частиц, обладающих энергиями в соответствующих интервалах $d\epsilon$ и $d\varepsilon$ одинаково, то

$$F_\epsilon d\epsilon = F_\varepsilon d\varepsilon. \tag{10.3}$$

Отсюда, используя соотношения (16), (10.1), (10.2), получаем Максвелловскую функцию распределения частиц по энергиям в "приведенном" виде.

$$F_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon/2}\sqrt{\epsilon}. \tag{10.4}$$

от температуры T.

11

Цилиндр высоты h и радиуса R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω, вовлекая во вращение газ, находящийся внутри цилиндра. Температура газа T, общее число молекул в цилиндре N. Найти давление газа на боковую стенку.

Решение:
В системе координат, связанной с вращающимся цилиндром, молекулы газа находятся в поле центробежной силы инерции $\overrightarrow{F} = m\omega^2\overrightarrow{r}$, направленной по радиусу. Работа этой силы по перемещению молекулы от оси в точку, отстоящую от радиуса на растояние r, равна

$$A = \int_0^r \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} = \frac{m\omega r^2}{2}. \tag{11.1}$$

Распределение Больцмана в этом случае принимает вид:

$$\frac{n_r}{n_0} = \exp\left(m\omega^2 r^2/kT\right), \tag{11.2}$$

где n_r - концентрация молекул на растоянии r от оси.
Обшее число молекул в цилиндре связано с концентрацией молекул соотношением:

$$N = h\int_0^R n_0 \exp\left(m\omega^2 r^2/kT\right) 2\pi r dr \tag{11.3}$$

После интегрирования получаем для концентрации на оси следующее выражение:

$$n_0 = \frac{Nm\omega^2}{\pi h 2kT}\,\frac{1}{\exp(m\omega^2 R^2/2kT) - 1}. \tag{11.4}$$

В соответствии с (11.2) концентрация у стенки равна

$$n_R = \frac{Nm\omega^2}{\pi h 2kT}\,\frac{\exp(m\omega^2 R^2/2kT)}{\exp(m\omega^2 R^2/2kT)-1}. \qquad (11.5)$$

Окончательно имеем, давление на стенку

$$p = n_R kT, \qquad (11.6)$$

где n_R определяется формулой (11.5).

12

Закрытую с обоих концов горизонтальную трубку длинны $l = 1\,m$ перемещают с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вдоль её оси. Внутри трубки находится аргон при температуре $T = 330\,K$. При каком значении a концентрация аргона вблизи торцов трубки будут отличаться друг от друга на $\eta = 1,0\%$?

Решение:
Как и в предыдущем случае будем искать решение в системе координат, связанной с движущейся цилиндрической трубкой. Начало координат поместим на левом конце трубки, а координатную ось направим вправо в направлении вектора $\vec{a}$. Тогда на молекулы аргона будет действовать Даламберова сила инерции $-m\vec{a}$. Т.е. молекулы аргона находятся в силовом поле подобном гравитационному полю $-m\vec{g}$ вблизи поверхности Земли. Тогда в соответствии с барометрической формулой Больцмана (21) концентрация молекул аргона n у правого торца трубки будет:

$$n = n_0 \exp(-Mal/RT), \qquad (12.1)$$

где n_0- концентрация молекул у левого торца, M- молярная масса аргона. учитывая, что по условию задачи $n = n_0 - 0,010n_0 = 0,990n_0$, имеем:

$$0,990 = \exp(-Mal/RT). \qquad (12.2)$$

После логарифмирования и подстановки численных значений получаем **ответ:** $a \approx 70g$

13

Выразить число молекул, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки сосуда в одну секунду, через среднюю скорость движения газовых молекул, если функция распределения молекул по скоростям изотропна (то есть зависит только от абсолютного значения скорости, но не от направления). Рассмотреть частный случай максвелловского распределения.

Решение:
Есть несколько способов решения данной задачи. Например, общий подход к решению изложен во втором томе "Общего курса физики" Д.В.Сивухина. Применим более простой метод. Мысленно выделим на стенке сосуда единичную площадку и рассмотрим столб газа, расположенный перпендикулярно стенке и имеющий выделенную площадку своим основанием. Направим ось x вдоль оси получившегося цилиндра. Рассмотрим молекулы, имеющие скорость в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$. Число таких молекул в единице объема нашего цилиндра $dn(v_x)$ есть:

$$dn_{v_x} = n\varphi_{v_x} dv_x \tag{13.1}$$

Предположим, что у всех этих молекул y и z компоненты скорости равны нулю, тогда все они, находящиеся в рассматриваемом столбе на расстоянии от стенки меньшим v_x достигнут ее. Таким образом, число ударов о единичную площадку для таких молекул будет равно

$$dz = v_x dn_{v_x} = v_x n\varphi_{v_x} dv_x. \tag{13.2}$$

Тот факт, что y и z компоненты скорости не равны нулю, и, следовательно, молекулы могут покидать наш воображаемый столб, ничего не меняет в ситуации, так как место выбывших в силу изотропности функции распределения займут идентичные частицы. Интегрирование по всем v_x, направленным в сторону стенки даст полное число ударов.

$$z = \int_0^\infty v_x dn_{v_x} = \int_0^\infty v_x n\varphi_{v_x} dv_x, \tag{13.3}$$

где - n концентрация частиц. В случае Максвелловского распределения функция φ_{v_x} имеет вид (3) и, применив при взятии интеграла (13.3) формулу (24), получим *ответ:*

$$z = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = n < v > /4 \tag{13.4}$$

14

Вольфрамовая нить, испаряясь в высокий вакуум при температуре $T = 2000$K, уменьшается в массе со скоростью $g = 1,14 \cdot 10^{-12}$ кг/(с·м^2). Вычислить давление насыщающего пара вольфрама при этой температуре. Атомная масса вольфрама $A = 0,184$ кг/моль.

Решение:
Рассмотрим сначала равновесную двухфазную систему, состоящую из вольфрамовой пластины и насыщенного пара вольфрама над ней при температуре T. Если считать, что все молекулы пара, ударяясь о пластину прилипают к ней, то число таких ударов в единицу времени на единицу поверхности должно быть равно числу атомов z , испаряющихся с поверхности вольфрама (в одну секунду с единицы площади). По условию задачи z равно:

$$z = \frac{g}{m_W}, \tag{14.1}$$

где m_W - масса атома вольфрама. С другой стороны z дается формулой (13.4) из задачи 13, и тогда с учетом равенства $p = nkT$ получаем,

$$\frac{n < v >}{4} = \frac{g}{m_W}; \quad \frac{p < v >}{4kT} = \frac{g}{m_W}, \tag{14.2}$$

В итоге имеем

$$p = g\sqrt{\frac{2\pi RT}{A}} \tag{14.3}$$

Подставив сюда численные значения, получим *ответ* : $p = 0,86$ нПа.

15

В тонкостенном сосуде объемом V, стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, находится идеальный газ. Сосуд помещен в вакуум. Как будет меняться с течением времени концентрация молекул в сосуде, если в его стенке проделать очень малое отверстие площади S? Считать, что истечение газа происходит настолько медленно, что оно практически не нарушает равновесность состояния во всем сосуде, за исключением малой области вблизи отверстия. Температуру газа в сосуде считать постоянной и равной температуре стенки.

Решение:
Убыль молекул dN в объеме обусловлена вылетом молекул за время dt через отверстие S, который можно учесть по формуле (18), тогда

$$dnV = \frac{n < v > Sdt}{4}. \quad (15.1)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$n = n_0 \exp(-\frac{S < v > t}{4V}), \quad (15.2)$$

где n_0 - начальная концентрация в момент $t = 0$.

16

Найти полную кинетическую энергию E молекул одноатомного газа, ударяющихся о квадратный сантиметр стенки в единицу времени. Задачу решить сначала в общем виде для изотропной функции распределения, а затем применить результат к частному случаю максвелловского распределения.

Решение:
Рассмотрим сначала частный случай, когда абсолютные значения скоростей одинаковы, а их распределение по скоростям изотропно. Так как число ударов молекул о единичную площадку в единицу времени равно $z = nv/4$ (см. задачу 13 или формулу (18)), то очевидно,

$$E = \frac{nv}{4}\frac{mv^2}{2} = \frac{mnv^3}{8}. \quad (16.1)$$

Если абсолютные значения скоростей различны (например, распределены по Максвеллу), то молекулы следует разбить на группы с практически одинаковыми значениями скоростей. В этом случае

$$E = \frac{m}{8}\sum_{0}^{k} v_i^3 \triangle n_i, \quad (16.2)$$

где k - число групп, на которые были разбиты молекулы , v_i -скорость, которая приписывается i-той группе, $\triangle n_i$ - число молекул в единице объема, попавшие в i-тую группу. В пределе сумму (16.2) можно заменить интегралом

$$E = \frac{m}{8}\int_0^\infty v^3 dn = \frac{m}{8}\int_0^\infty v^3 n F_v dv = \frac{mn}{8}\int_0^\infty v^3 F_v dv = \frac{nm}{8} < v^3 > . \tag{16.3}$$

Здесь F_v - максвеловская функция распределения (формула (9)). Таким образом задача свелась к нахождению среднего значения куба скорости, т.е. к взятию интеграла (16.3) с помощью формулы (28). В результате получаем

$$E = n\sqrt{\frac{2k^3T^3}{\pi m}} \tag{16.4}$$

17

В тонкостенном сосуде, содержащем идеальный газ при температуре T, имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Определить среднее значение $< \varepsilon >$ кинетической энергии вылетевшей молекулы в предположении, что за время опыта изменения числа молекул и температуры газа пренебрежимо малы.

Решение:
Очевидно, что среднее значение $< \varepsilon >$ кинетической энергии вылетающих молекул равно отношению полной кинетической энергии E молекул одноатомного газа, попадающих на это малое отверстие ds в единицу времени, к среднему числу молекул, пролетевших через это отверстие в единицу времени, т.е.

$$< \varepsilon > = \frac{E}{z} = \frac{n\sqrt{\frac{2k^3T^3}{\pi m}}}{\frac{n<v>}{4}} = \frac{n\sqrt{\frac{2k^3T^3}{\pi m}}}{n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}} = 2kT, \tag{17.1}$$

Проанализируем полученный результат. Следует обратить внимание на то, что молекула, испытывающая соударение со стенкой в среднем передает ей энергию $2kT$, что на $kT/2$ больше, чем средняя кинетическая энергия молекулы в идеальном газе. То есть можно сказать, что столкновения со стенкой чаще испытывают самые быстрые молекулы. Если в стенке сделать маленькое отверстие, то вылетать из него будут чаще быстрые молекулы, обладающие большей энергией. В результате остающийся газ будет постепенно охлаждаться.

18

Тонкостенный сосуд объема V, наполненный идеальным газом, поддерживается при постоянной температуре T. В стенке сосуда имеется малое отверстие площади S, через которое молеекулы вылетают в вакуум. Какое количество тепла $Q = Q(t)$ надо подводить к сосуду в единицу времени для поддержания в нем постоянной температуры?

Решение:
Как следует из решения задачи 11 за единицу времени через отверстие S вылетает в вакуум $n < v > S/4$ молекул, при этом каждая из них, как было отмечено в задаче 16 в среднем уносит из объема энергию $2kT$, в то время как средняя энергия частиц в объеме $3kT/2$. Чтобы компенсировать потерю $kT/2$, необходимо побводить ежесекундно к объему количество тепла Q равное

$$Q(t) = \frac{1}{8}n < v > SkT = \frac{1}{8}n_0 \exp(-\frac{S < v > t}{4V}) < v > SkT. \qquad (18.1)$$

19

Потенциальная энергия молекул газа в некотором центральном поле зависит от расстояния r до центра поля как $U(r) = ar^2$, где a - положительная постоянная. Температура газа T, концентрация молекул в центре поля n_0. Найти:

1. число молекул, находящихся в интервале расстояний $(r, r + dr)$;
2. наиболее вероятное расстояние молекул от центра поля;
3. относительное число всех молекул в слое $(r, r + dr)$;
4. число молекул с потенциальной энергией $(U, U + dU)$;

5. наиболее вероятное значение потенциальной энергии.

Решение:

1. Искомое число молекул определится как $dN = ndV$, где dV - элементарный объем, соответствующий интервалу расстояний $(r, r + dr)$. По условию данное поле обладает сферической симметрией, поэтому $dV = 4\pi r2dr$. Тогда, учитывая формулу 20, получим:

$$dN = n_0 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) 4\pi r^2 dr. \tag{19.1}$$

2. Наиболее вероятное расстояние определится значением абсциссы, соответствующей максимуму функции dN/n_0dr , описываемой формулой

$$\frac{dN}{n_0 dr} = exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) 4\pi r^2. \tag{19.2}$$

Для нахождения ее максимального значения надо взять производную этой функции по r и приравнять ее нулю. Искомое значение $r_{ver} = \sqrt{kT/a}$

3. задача сводится к определению величины dN/N , где N - полное число частиц во всем пространстве. Определим его:

$$N = \int_0^\infty dN = \int_0^\infty n_0 \exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) 4\pi r^2 dr. \tag{19.3}$$

Интеграл вычисляется по формуле 25. В результате имеем,

$$N = n_0 \left(\frac{\pi kT}{a}\right)^{3/2} \tag{19.4}$$

Окончательно получаем:

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{a}{\pi kT}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{ar^2}{kT}\right) 4\pi r^2 dr. \tag{19.5}$$

4. По условию $U = ar^2$. Отсюда $r^2 = U/a,\ r = \sqrt{U/a},\ dr = dU/(2\sqrt{aU})$. Подставляя полученные значения в выражение 19.1 окончательно получаем:
$$dN = (2\pi n_0 a^{3/2}) \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sqrt{U} dU. \qquad (19.6)$$

5. Для нахождения наиболее вероятного значения потенциальной энергии необходимо рассмотреть отношение dN/dU как функцию U.
$$\frac{dN}{dU} = (2\pi n_0 a^{3/2}) \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \sqrt{U}. \qquad (19.7)$$
Эта функция имеет смысл плотности вероятности распределения частиц по энергиям и имеет вид кривой с максимумом. Этот максимум и отвечает наиболее вероятному значению потенциальной энергии. Чтобы получить значение U_{ver} нужно взять производную от функции по U и приравнять ее нулю. В результате получаем:
$$U_{ver} = \frac{kT}{2}. \qquad (19.8)$$

20

Максвелловская функция распределения частиц по v_x - компоненте скорости $\varphi_(v_x)$ имеет вид функции Гаусса, график которой приведен на рис.1. Максимум кривой имеет место при $v_x = 0$, а сама кривая имеет колоколообразную форму. Найти ширину этой Δv_x кривой на половине высоты.

Решение:
Обозначим значение x-компоненты скорости, при которой значение $\varphi_(v_x)$ уменьшается в два раза, как $v_x^{'}$. Тогда по формуле (3):
$$\varphi_{v_x'} = (m/2\pi kT)^{1/2} \exp(-m{v_x^{'}}^2/2kT), \qquad (20.1)$$
так как
$$\varphi_0 = (m/2\pi kT)^{1/2}, \qquad (20.2)$$
то поделив (20.1) на (20.2) имеем:

$$\frac{1}{2} = \exp(-m{v_x'}^2/2kT). \tag{20.3}$$

Прологарифмируем это равенство, и учитывая, что $\Delta v_x = 2v_x'$, окончательно получим:

$$\Delta v_x = \ln 2\sqrt{\frac{8kT}{m}}.$$

21

Определить такое значение x-компоненты скорости v_x'', для которого в диапазоне от v_x'' до $-v_x''$ находятся x-компоненты скорости половины всех молекул объема.

Решение:
Из условия следует, что

$$\frac{N}{2} = \int_{-v_x''}^{v_x''} N\varphi_{v_x} dv_x = \int_{-v_x''}^{v_x''} N(m/2\pi kT)^{1/2}\exp(-mv_x^2/2kT)dv_x. \tag{21.1}$$

Отсюда:

$$\frac{1}{4} = \int_0^{v_x''} (m/2\pi kT)^{1/2}\exp(-mv_x^2/2kT)dv_x. \tag{21.2}$$

Перейдем под знаком интеграла к переменной $t = \sqrt{\frac{m}{kT}}v_x''$.
Тогда уравнение (21.2) сведется к равенству:

$$\frac{\pi}{8} = \int_0^{t\sqrt{kT/m}} \exp(-t^2/2)dt \tag{21.3}$$

Обратившись к таблице значений интеграла вероятностей Лапласа во "Введении"найдем:

$$v_x'' \approx 0,9\sqrt{\frac{kT}{m}} \tag{21.4}$$

22

Допустим,что в разрядной трубке молекулы идеального газа излучают монохроматический свет на частоте ω_0. Излучение вдоль оси разрядной трубки регистрируется с помощью спектрографа высокой разрешающей силы. В силу эффекта Доплера излучение молекул, летящих в сторону приемника будет восприниматься со сдвигом в коротковолновую область спектра, а излучение молекул, летящих от приемника будет восприниматься со сдвигом в длинноволновую область спектра (красное смещение). В результате наблюдаемая спектральная линия будет уширена. Найти спектральный контур этой линии и ширину этого контура на половине высоты.

Решение:
Решение этой задачи аналогично решению задачи 5.
В силу эффекта Доплера:

$$\omega = \omega_0(1 + v_x/c), \tag{22.1}$$

где ω - регистрируемая частота излучения, а v_x - проекция вектора скорости на направление наблюдения.
Соответственно

$$v_x = c\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \tag{22.2}$$

Продифференцируем (22.1).

$$d\omega = dv_x\omega_0/c. \tag{22.3}$$

По аналогии с (8.2) можно записать:

$$dN = N\varphi_{v_x}dv_x = NP_\omega d\omega, \tag{22.4}$$

где P_ω - искомый спектральный контур линии.

$$P_\omega = \varphi_{v_x}\frac{dv_x}{d\omega}. \tag{22.5}$$

Переходя в правой части этого равенства к частотам по формулу (22.2), имеем:

$$P_\omega = (m/2\pi kT)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{\frac{mc^2}{2kT}}\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2. \qquad (22.6)$$

Ширина контура линии $\Delta\omega_{dop}$ так же, как и в задаче 14 найдется из уравнения:

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\frac{\Delta\omega_{dop}^2}{4\omega_0^2}\right). \qquad (22.7)$$

Отсюда:

$$\frac{\Delta\omega_{dop}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{8kTln2}{mc^2}}, \qquad (22.8)$$

или

$$\frac{\Delta\omega_{dop}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{8RTln2}{Mc^2}}. \qquad (22.9)$$

Подставляя численные значения констант равенству (22.8) можно представить в виде:

$$\frac{\Delta\omega_{dop}}{\omega_0} \approx 7\cdot 10^{-7}\sqrt{\frac{T}{M'}}, \qquad (22.10)$$

здесь M' - молярная масса, выраженная в граммах на моль.

23

Считая столкновения молекул со стенками абсолютно упругими, определить давление оказываемое идеальным газом на стенку сосуда.

Решение:
Также, как и в задаче (13), выделим на стенке сосуда единичную площадку и рассмотрим столб газа, расположенный перпендикулярно стенке и имеющий выделенную площадку своим основанием. Направим ось x вдоль оси получившегося цилиндра. Рассмотрим молекулы, имеющие скорость в интервале $[v_x, v_x+dv_x]$. Число таких молекул в единице объема нашего цилиндра dn_{v_x} есть:

$$dn_{v_x} = n\varphi_{v_x}dv_x \qquad (23.1)$$

Предположим, что у всех этих молекул y и z компоненты скорости равны нулю, тогда все они, находящиеся в рассматриваемом столбе на расстоянии от стенки меньшим v_x, достигнут ее в течении секунды. Таким образом, число ударов о единичную площадку в единицу времени для таких молекул будет равно

$$dz = v_x dn_{v_x} = v_x n \varphi_{v_x} dv_x. \tag{23.2}$$

Как уже отмечалось в задаче (13) тот факт, что реально y и z компоненты скорости не равны нулю, никак не влияет на полученный результат, так как место выбывших из столба молекул в силу изотропности функции распределения займут идентичные частицы. Давление, как известно, равно изменению импульса, переданного молекулами единичной площадке в единицу времени. Т.к. при упругом ударе о стенку тангенциальная составляющая скорости не меняется, то, очевидно, давление газа обусловлено изменением $x-$ компоненты скорости.

$$dp = 2mv_x dz, \tag{23.3}$$

Подставляя в (23.3) dz из (23.2) итоге имеем:

$$dp = 2mv_x^2 \cdot n\varphi_x dv_x \tag{23.4}$$

Интегрируя (23.4), с учетом формулы (3) получаем:

$$p = \int_0^\infty 2mv_x^2 \cdot n \cdot \varphi_{v_x} dv_x = n \cdot (m/2\pi kT)^{1/2} \int_0^\infty v_x^2 \exp(-mv_x^2/2kT) dv_x. \tag{23.5}$$

Применяя (25) окончательно получаем:

$$p = nkT \tag{23.6}$$

24

Исходя из Больцмановского распределения молекул в потенциальном поле показать, что гравитационное поле Земли не может удерживать атмосферу бесконечно долго.

Решение:
Как известно из курса механики, потенциальная энергия частицы в гравитационном поле Земли, если принять за ноль ее значение на бесконечности, убывает по мере приближения к Земле и достигает значения $-mgR_З$ на поверхности планеты (здесь $R_З$ -радиус Земли). Переопределим нулевую точку потенциальной энергии так, чтобы она находилась на поверхности Земли, тогда потенциальная энергия частицы на бесконечности будет равна $U_\infty = mgR_З$. В соответствии с формулой Больцмана (20) для изотермической атмосферы

$$n_\infty = n_0 \exp\left(\frac{mgR_З}{kT}\right), \tag{24.1}$$

т.е. концентрация молекул на любом сколь угодно далеком расстоянии от Земли n_∞ имеет конечное значение, что невозможно т.к. число молекул в атмосфере Земли ограничено. Концентрация молекул на бесконечности должна равняться нулю, а это, как видно из (24.1), возможно только при $n_0 = 0$, т.е. при полном отсутствии атмосферы, так что потеря Землей своей атмосферы - вопрос времени.

25

При взрыве атомной (урановой) бомбы в ее центре достигаются темпервтуры порядка $T \approx 10$ кэВ. Полагая плотность урана в центре бомбы порядка $\rho = 20$ г/см^3, найти давление внутри бомбы. Сравнить с давлением в центре Земли, считая плотность Земли постоянной и равной $\rho_З = 5,5$ г/см^3. Давление светового излучения не учитывать.

Решение:
При взрыве бомбы в течении нескольких наносекунд произойдет полная (вплоть до ядер) ионизация атомов урана. Образовавшийся электронный газ и определит давление внутри бомбы. Предполагая электронный газ идеальным, получим для давления в центре бомбы значение P_b равное:

$$P_b = Zn_ukT, \tag{25.1}$$

где $Z = 92$ - атомный номер урана, $n_u = \rho N_A/A$ - концентрация ядер урана (N_A - число Авогадро, $A = 238 \cdot 10^{-3}$ кг/моль - молярная масса

урана).
Окончательно имеем:

$$P_b = ZkT\rho N_A/A. \tag{25.2}$$

Для численного решения установим связь между электронвольтом и градусом Кельвина. Пусть средняя энергия электронов $<\varepsilon>= 1$ эВ, т.е. $1,6\cdot 10^{-19}$ Дж. Тогда из соотношения $<\varepsilon>= 3kT/2$ получим значение температуры, соответствующее 1 эВ. Это значение равно 7700 К. Подставляя численные значения в (25.2), получаем $P_b \sim 7\cdot 10^{15}$ Па или $\sim 7\cdot 10^{10}$ атм.
Давление в центре Земли равно весу земного вещества в цилиндре высотой, равной радиусу Земли $R_3 = 6400$ км, и площадью основания 1 м^2. Учитывая линейную зависимость ускорения свободного падения от расстояния до центра Земли, в итоге имеем:

$$P_3 = \int_0^{R_3} \rho_3 grdr/R_3 = \rho_3 grR_3/2 \approx 1,7\cdot 10^6 \text{ атм} \tag{25.3}$$

26

В атмосфере воздуха находится правильная пирамида, площадь каждой грани которой равна 1 кв.м. Какое количество ударов в секунду со стороны молекул воздуха испытывает эта пирамида? Воздух рассматривать как смесь кислорода с азотом в пропорции 1:4, давление равно $p = 10^5$ Па, $T = 300$ К.

Решение:
Число ударов по четырем граням пирамиды со стороны молекул азота z_A будет в соответствии с формулой (18) равно

$$z_A = n_A <v_A>= \frac{0,8p}{kT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M_A}} = 0,8p\sqrt{\frac{8N_A}{\pi kTM_A}} = 0,93\cdot 10^{28}\text{м}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}, \tag{26.1}$$

где $M_A = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль - молярная масса азота, N_A -число Авогадро. Аналогично подсчитывается количество ударов молекул кислорода z_K.

$$z_K = n_K < v_K >= 0,2p\sqrt{\frac{8N_A}{\pi kTM_K}} = 0,23 \cdot 10^{28}\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}. \qquad (26.2)$$

Общее число ударов $z = z_A + z_K = 1,16 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}\cdot$ с$^{-1}$.

27

Контрольное задание 1

1. $< v_x >= 0$.
2. $< \varepsilon >= 3kT/2$.
3. Площадь под графиком функции F_ε равна π.
4. Если в откаченном теплоизолированном сосуде проделать малое отверстие и он заполнится воздухом при нормальных условиях, то температура воздуха внутри сосуда будет выше, чем вне его.
5. $< v^3 >= 0$.

Рассмотрим последовательно 5 вышеприведенных утверждений. Если первое утверждение верно, то в первом столбце в нижней строке таблицы поставте цифру 1 (единицу), если утверждение неверно нарисуйте в этой позиции 0 (ноль). В результате в нижней строке таблицы получится двоичное число типа 00010. Преобразуйте его в десятичную систему счисления (в приведенном примере это будет число 2) и свертесь с ответом. Если есть расхождения с ответом перерешайте задачи пособия еще раз.

1	2	3	4	5
*	*	*	*	*

Ответ: 26.

28

Контрольное задание 2

1. $< |v_x| >= 0$.
2. $< \varepsilon >= 2kT/2$.
3. Площадь под графиком функции F_ε равна нулю
4. Если в откаченном теплоизолированном сосуде проделать малое отверстие и он заполнится воздухом при нормальных условиях, то температура воздуха внутри сосуда будет такая же, как и вне его.
5. $< v_x^3 >= 0$.

Заполняем таблицу в соответствии с указаниями контрольного задания 1.

1	2	3	4	5
*	*	*	*	*

Ответ: 1

29

Контрольное задание 3

1. Относительная доля молекул идеального газа, имеющих скорость меньше наивероятнейшей, равна 0,57.
2. $< \varepsilon >= 3kT/2$.
3. Площадь под графиком функции $v_x\varphi_{v_x}$ равна нулю.
4. Если в откаченном теплоизолированном сосуде проделать малое отверстие и он заполнится воздухом при нормальных условиях, то температура воздуха внутри сосуда будет меньше, чем вне его.
5. $< v_x^5 >= 0$.

Заполняем таблицу в соответствии с указаниями контрольного задания 1.

1	2	3	4	5
*	*	*	*	*

Ответ: 29

30

Контрольное задание 4

1. Сумма модулей скоростей всех молекул одного моля любого инертного газа превышает скорость света.
2. $< \sqrt{\varepsilon >} = \sqrt{4kT/\pi}$.
3. Среднее значение импульса молекул идеального газа равно нулю.
4. Подъемная сила, действующая на дирижабль, при нормальном атмосферном давлении с ростом температуры уменьшается.
5. $\sqrt{4/\pi}\int_x^\infty \exp(-t^2)dt = 1 - erf(x)$

Заполняем таблицу в соответствии с указаниями контрольного задания 1.

1	2	3	4	5
*	*	*	*	*

Ответ, замечания и коментарии просьба присылать по адресу: vimi@pobox.spbu.ru