ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ.

**Введение.**

К настоящему времени теория ядерных реакций как таковая не создана. Теоретическое описание ядерных реакций базируется на использовании различных моделей и подходов. Различные подходы используются не только для описания различных типов реакций, но и для описания механизмов одной и той же реакции. Формально это связано с тем, что задача о столкновении ядерных частиц является задачей многоканальной и многотельной, и точное ее решение невозможно. В ряде случаев нам неизвестно достаточно хорошо взаимодействие между налетающей частицей и ядром-мишенью. Различные подходы к описанию ядерных реакций различаются степенью их строгости, тем, какие модельные предположения положены в их основу.

Предлагаемый курс ставит целью ознакомить слушателей с основами формальной теории рассеяния, методами решения многоканальной задачи. Рассматриваются последовательно различные подходы к описанию механизмов ядерных реакций: резонансная теория ядерных реакций, модели прямых ядерных реакций, статистический подход. Завершает курс изложение микроскопического подхода в теории ядерных реакций.

При изложении материала используется аппарат квантовой механики, модельные представления о строении ядра, некоторые результаты, полученные в теории ядра.

## Глава I. Введение в формальную теорию рассеяния.

### §1. Формулировка задачи рассеяния, амплитуда рассеяния.

1. Рассмотрим классификацию основных процессов столкновений. В общем случае процесс столкновения двух частиц А и а может быть записан в виде:

$$A + a \to B + в + X \qquad (1.1)$$

где X – обозначен набор частиц. Простейшими называются так называемые бинарные процессы:

$$A + a \to B + в \qquad (1.2)$$

Описание таких процессов и будет составлять содержание данного курса.

В силу закона сохранения энергии будем иметь:

$$\varepsilon_A + \varepsilon_a + \varepsilon_{Aa} = \varepsilon_B + \varepsilon_b + \varepsilon_{Bb} \qquad (1.3)$$

Здесь $\varepsilon_A, \varepsilon_a$ и $\varepsilon_B, \varepsilon_b$, соответственно, энергии возбуждения сталкивающихся и рассеиваемых частиц, $\varepsilon_{Aa}$ и $\varepsilon_{Bb}$ – энергии их относительного движения. В случае А $\neq$ В и а$\neq$в состав частиц А и а меняется. Такие процессы будем называть **процессами с перераспределением частиц**. Пусть состав частиц не меняется, тогда вместо (1.2) и (1.3) имеем:

$$A + a \to A' + a' \qquad (1.4)$$

$$\varepsilon_A + \varepsilon_a + \varepsilon_{Aa} = \varepsilon_{A'} + \varepsilon_{a'} + \varepsilon_{A'a'} \qquad (1.5)$$

Формулы (1.4) и (1.5) в общем случае соответствуют неупругому рассеянию. Если $\varepsilon_A = \varepsilon_{A''}$ и $\varepsilon_a = \varepsilon_{a'}$, то $\varepsilon_{Aa} = \varepsilon_{A'a'}$. В этом случае имеем упругое рассеяние.

2. Введем представление о сечении рассеяния. Пусть в направлении оси OZ на мишень падает поток частиц. Обозначим N число частиц, проходящее за единицу времени через единичную площадку. Эксперимент по наблюдению процесса

столкновения состоит в том, что с помощью детектора, расположенного под углом $\theta$ к оси OZ, фиксируется поток рассеянных частиц. Детектор расположен достаточно далеко от мишени, так что регистрируются свободные (от взаимодействия с мишенью) частицы. Пусть $\Delta N$ - число частиц, рассеянных в единицу времени под углом $\theta$ (будем этот угол называть углом рассеяния) в телесном угле $d\Omega$ (см.рис.1.1.). Найдем связь между величинами $\Delta N$ и N .

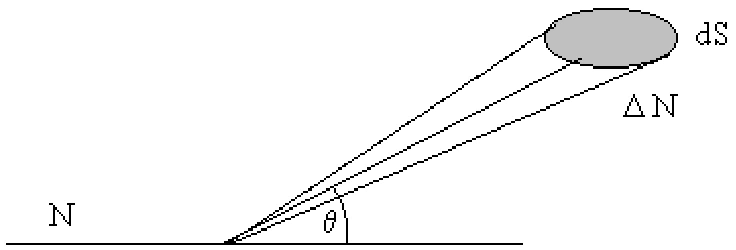


Рис. 1.1.

Естественно полагать, что $\Delta N$ пропорционально N и $d\Omega$, а коэффициент пропорциональности (обозначим его $\sigma$), вообще говоря, зависит от угла рассеяния $\theta$. В результате будем иметь:

$$\Delta N = \sigma(\theta) N\, d\Omega \qquad (1.6)$$

Функция $\sigma(\theta)$, по определению, называется **сечением рассеяния или дифференциальным сечением рассеяния.** Проинтегрируем $\sigma(\theta)$ по всем телесным углам:

$$\sigma = \int \sigma(\theta) d\Omega \qquad (1.7)$$

Величина $\sigma$ является **интегральным сечением рассеяния**.

3. Основной задачей формальной теории рассеяния является нахождение величин $\sigma(\theta), \sigma$. Аппарат этой теории основан на формализме квантовой механики.Возможны два подхода к построению теории рассеяния: стационарный и нестационарный. В последнем подходе явно рассматривается зависимость волновой функции от времени и прослеживается изменение квантовомеханического состояния со временем. В стационарном описании не рассматривается в явном виде зависимость волновых функций от времени (за исключением фазового множителя), изучается стационарный поток частиц на мишень, а динамика процесса рассеяния формулируется на языке граничных условий. Было показано, что оба подхода приводят к эквивалентному описанию, но формализм временного подхода более громоздок. Поэтому в настоящем курсе изложение основано на использовании стационарного подхода. Связь между этими подходами отмечается в разделе об S-матрице в связи с введением оператора эволюции.

4. Рассмотрим проблему выделения движения центра тяжести в системе двух сталкивающихся тел. Имеем следующее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2 + V(/\vec{r}_1 - \vec{r}_2/) \right] \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \qquad (1.8)$$

Здесь $m_1$, $m_2$ – массы сталкивающихся тел, $V(/\vec{r}_1 - \vec{r}_2/)$- взаимодействие между ними, предполагается центральным. Описание, выходящее за рамки центрального взаимодействия, будет дано ниже. Сделаем замену переменных:

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{R}, \vec{r}$$

$$\vec{R}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \tag{1.9}$$

$$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2 \tag{1.10}$$

Координаты $\vec{R}$ и $\vec{r}$ имеют смысл, соответственно, координат движения центра тяжести системы двух сталкивающихся тел и радиуса-вектора их относительного движения. Подставляя (1.9) и (1.10) в (1.8), будем иметь:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(\vec{R},\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\vec{R}}-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}}+V(r)\right]\cdot\Phi(\vec{R},\vec{r},t) \tag{1.11}$$

$$M=m_1+m_2 \tag{1.12}$$

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{1.13}$$

Функциональный вид волновой функции в переменных $\vec{R}$ и $\vec{r}$ будет другим, поэтому она обозначена Ф. Будем искать $\Phi(\vec{R},\vec{r},t)$ в виде:

$$\Phi(\vec{R},\vec{r},t)=\exp\left\{-i\left[\left(\frac{P^2}{2m}+E\right)\cdot\frac{t}{\hbar}\right]\right\}\exp\left\{i\frac{\vec{P}\vec{R}}{\hbar}\right\}\cdot\phi(\vec{r}) \tag{1.14}$$

Здесь импульс $\vec{P}$ относится к движению центра масс. Подставляя (1.14) в (1.11), получаем:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}}+V(\vec{r})\right]\cdot\phi(\vec{r})=E\phi(\vec{r}) \tag{1.15}$$

Таким образом, вместо исходного двухчастичного уравнения Шредингера имеем одночастичное уравнение для относительного движения сталкивающихся частиц. Произошло отделение движения центра масс. Уравнение (1.15) удобно записать в следующем виде:

$$(\Delta+k^2)\phi_k(\vec{r})=U(r)\phi_k(\vec{r}) \tag{1.16}$$

Здесь $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$ и $U(r)=\frac{2m}{\hbar^2}V(r)$, индекс $\vec{r}$ у оператора Лапласа $\Delta$ опущен, поскольку в уравнении (1.16) кроме $\vec{r}$ нет других переменных.

5. Рассмотрим граничные условия в задаче рассеяния. Пусть вдоль оси OZ на мишень падает поток частиц, в результате взаимодействия с мишенью рассеянные частицы движутся под углом $\theta$. Естественно полагать, что на достаточно большом расстоянии от мишени вне зоны взаимодействия поток нерассеянных частиц, описываемых плоской волной, будет складываться с потоком рассеянных частиц, описываемых расходящейся сферической волной. Амплитуда сферической волны будет зависеть от угла рассеяния. Для асимптотики функции $\phi_k(\vec{r})$ будем иметь:

$$\phi_k(\vec{r})\underset{\vec{r}\to\infty}{\to}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left\{e^{ikz}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\} \tag{1.17}$$

В выражении k – модуль волнового вектора (или в единицах $\hbar$ импульса относительного движения), $(2\pi)^{3/2}$ - нормировочный множитель:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\int e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}d\vec{r}=\delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{1.18}$$

Здесь произведено обобщение записи плоской волны:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot e^{ikz}\to\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad\qquad \vec{k}\ \|\ \mathrm{OZ}$$

По определению, величина $f(\theta)$ называется **амплитудой рассеяния.** Она показывает, насколько велика доля частиц, рассеянных в результате взаимодействия с мишенью на угол $\theta$ , по отношению к числу частиц, падающих на мишень.

6. Найдем связь между амплитудой рассеяния и сечением рассеяния. Рассмотрим квантовомеханическую плотность тока:

$$\vec{j}=\frac{\hbar}{2mi}(\phi^*\nabla\phi-\phi\nabla\phi^*) \qquad (1.19)$$

В соответствии с вышесказанным N = $j_z$, а $\Delta N = j_r\cdot ds$ . Представим (1.17) в виде двух слагаемых:

$$\varphi_k(z)+\chi_k(r)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot e^{ikz}+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot f(\theta)\cdot\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (1.20)$$

Подставляя $\varphi_k(z)$ в (1.19), для $j_z$ будем иметь:

$$j_z=\frac{\hbar}{2mi}\cdot\left(\varphi_k^*(z)\frac{\partial\varphi_k(z)}{\partial z}-\varphi_k(z)\frac{\partial\varphi_k^*(z)}{\partial z}\right)=$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\left(e^{-ikz}ike^{ikz}-e^{ikz}(-ik)e^{-ikz}\right)=\frac{\hbar k}{m}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}$$

Отсюда следует, что:

$$N=\frac{v}{(2\pi)^3} \qquad (1.21),$$

где $v=\hbar k/m$ .

Аналогично находим $\Delta N_i$:

$$\Delta N=j_r ds=\frac{\hbar}{2mi}\left(\chi_k^*(r)\cdot\frac{\partial\chi_k(r)}{\partial r}-\chi_k(r)\cdot\frac{\partial\chi_k^*(r)}{\partial r}\right)\cdot ds=$$

$$=\frac{\hbar}{2mi}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\left\{f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}ikf(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}-\right.$$

$$\left.-f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}(-ik)\cdot f^*(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}+O(r^3)\right\}\cdot ds=\frac{\hbar k}{m}/f(\theta)/^2\frac{1}{r^2}\frac{1}{(2\pi)^3}ds$$

Таким образом

$$\Delta N=v/f(\theta)/^2\frac{1}{r^2}\frac{1}{(2\pi)^3}ds \qquad (1.22)$$

Подставляя (1.21) и (1.22) в соотношение (1.6), получаем:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}v/f(\theta)/^2\frac{1}{r^2}ds=\sigma(\theta)\frac{v}{(2\pi)^3}d\Omega \qquad (1.23)$$

Отсюда с учетом $d\Omega=ds/r^2$ имеем искомые соотношения:

$$\sigma(\theta)=/f(\theta)/^2 \qquad (1.24)$$

$$\sigma=\int/f(\theta)/^2d\Omega \qquad (1.25)$$

7. Перейдем к интегральной формулировке задачи рассеяния. Рассмотрим уравнение Шредингера:

$$(\Delta + k^2)\phi_k(\vec{r}) = U(\vec{r})\phi_k(\vec{r}) \quad (1.16)$$

Будем искать его решение в следующем виде:

$$\phi_k(\vec{r}) = \varphi_k(\vec{r}) + f_k(\vec{r}) \quad (1.26),$$

где $\varphi_k(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению (1.16) без правой части:

$$(\Delta + k^2)\varphi_k(\vec{r}) = 0 \quad (1.27),$$

а $f_k(\vec{r})$ строится с помощью функции Грина:

$$f_k(\vec{r}) = \int G_0(\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot U(\vec{r}\,')\phi_k(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' \quad (1.28).$$

Одночастичная функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$(\Delta + k^2)G_0(\vec{r} - \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \quad (1.29)$$

Проверим, что (1.26) с учетом (1.27) - (1.29) удовлетворяет уравнению (1.16). Подставляя (1.26) с (1.28) в (1.16), будем иметь:

$$\begin{aligned}
&(\Delta + k^2)\left[\varphi_k(\vec{r}) + f_k(\vec{r})\right] = (\Delta + k^2)\cdot f_k(\vec{r}) = \\
&= (\Delta + k^2)\int G_0(\vec{r} - \vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\phi_k(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' = \\
&= \int \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\phi_k(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' = U(\vec{r})\phi_k(\vec{r})
\end{aligned}$$

Здесь было использовано следующее свойство $\delta$ -функции:

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (1.30)$$

Подставляя (1.28) в (1.26), получаем для волновой функции интегральное уравнение:

$$\phi_k(\vec{r}) = \varphi_k(\vec{r}) + \int G_0(\vec{r} - \vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\phi_k(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' \quad (1.31)$$

Интегральная формулировка задачи рассеяния сводится к решению уравнения (1.31) с учетом граничных условий. Эта формулировка имеет ряд преимуществ по сравнению с дифференциальной: 1). Граничные условия, как будет показано ниже, могут быть учтены в записи интегрального уравнения (1.31), 2). К решению уравнения (1.31) могут быть применены хорошо разработанные приближенные методы, 3). Наконец, из рассмотрения интегрального уравнения непосредственно возникает связь между амплитудой рассеяния и потенциалом взаимодействия.

8. Рассмотрим одночастичную функцию Грина в импульсном (энергетическом) и координатном представлении. Из уравнения

$$(\Delta + k^2)G_0(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$$

формально получаем:

$$G_0(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta + k^2}\delta(\vec{r}) \quad (1.32)$$

Используя интегральное представление для $\delta(\vec{r})$, будем иметь:

$$G_0(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta + k^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{q}\vec{r}}\,d\vec{q}\cdot = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{k^2 - q^2}d\vec{q} \quad (1.33)$$

Здесь учтено также, что $\nabla^2 = \Delta$. Рассмотрим интеграл по углам вектора $\vec{q}$ :

$$\int e^{i\vec{q}\vec{r}}\,d\vec{q} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{i\vec{q}\vec{r}}\,q^2 dq\cdot d\varphi\cdot ds \qquad s = \cos(\vec{r},\vec{q}) \quad (1.34)$$

Проводя интегрирование в (1.34), получаем:

$$\int e^{i\vec{q}\vec{r}}\,d\vec{q} = \frac{2\pi}{iqr}\left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right) \quad (1.35)$$

Поставляя (1.35) в (1.33) и заменяя $\vec{r}$ на $\vec{r}-\vec{r}'$, будем иметь:

$$G_0(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4\pi^2 i}\cdot\frac{1}{/\vec{r}-\vec{r}'/}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q\cdot e^{iq/\vec{r}-\vec{r}'/}dq}{k^2-q^2} \qquad (1.36)$$

При получении выражения (1.36) учтено, что:

$$-\int_0^{\infty}\frac{e^{-iqr}}{k^2-q^2}\cdot qdq = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{iqr}}{k^2-q^2}\cdot qdq \qquad (1.37)$$

Соотношение (1.36) является **импульсным представлением** для одночастичной **свободной** функции Грина. Термин “свободная” означает, что функция Грина соответствует уравнению Шредингера без взаимодействия. Из (1.36), используя $(2m/\hbar^2)E = k^2$, можно получить функцию Грина в **энергетическом представлении**:

$$G_0(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{8\pi^2 i}\cdot\frac{1}{/\vec{r}-\vec{r}'/}\int_0^{\infty}\frac{e^{iq/\vec{r}-\vec{r}'/}}{E-E'}dE' \qquad \left(q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\cdot E'\right) \qquad (1.38)$$

Интеграл по $q$ в (1.36) может быть вычислен с помощью теоремы о вычетах. Разлагая в подинтегральном выражении знаменатель на множители, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{qe^{iqr}}{k^2-q^2}dq = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{qe^{iqr}}{(q-k)(q+k)}dq \qquad (1.39)$$

Для вычисления интеграла выберем контур, включающий полюс $q=k$ и не включающий полюс $q=-k$ (см.рис.1.2а.). Обозначим этот контур $C_+$. Согласно теореме о вычетах получаем:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{qe^{iqr}}{(q-k)(q+k)}dq = -\pi i e^{ikr} \qquad (1.40)$$

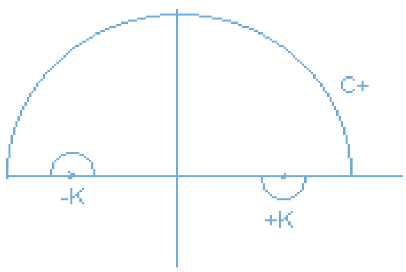


Рис.1.2а.

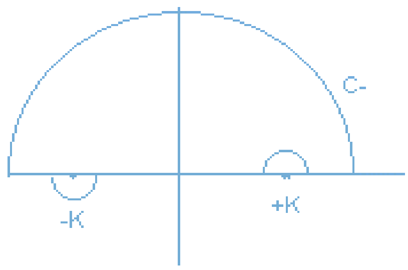


Рис.1.2б.

Подставляя (1.40) в (1.36), будем иметь:

$$G_0^{(+)}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ik/\vec{r}-\vec{r}'/}}{/\vec{r}-\vec{r}'/} \qquad (1.41)$$

Можно видеть, что асимптотическое выражение для одночастичной функции Грина $G_0^{(+)}(\vec{r}-\vec{r}')$ содержит расходящуюся сферическую волну. Таким образом, правило обхода контура соответствует заданию определенных граничных условий. Аналогично, выбирая контур интегрирования $C_-$ (см.рис.1.2б.), получаем для интеграла по $q$:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{qe^{iqr}}{(q-k)(q+k)}dq=-\pi ie^{-ikr} \qquad (1.42),$$

а для функции Грина , соответственно, выражение:

$$G_0^{(-)}(\vec r-\vec r\,')=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{-ik/\vec r-\vec r\,'/}}{/\vec r-\vec r\,'/} \qquad (1.43)$$

Асимптотическое выражение для $G_0^{(-)}(\vec r-\vec r\,)$ содержит сходящуюся сферическую волну. Перепишем уравнение (1.31) в следующем виде:

$$\phi_k^{(\pm)}(\vec r)=\varphi_k(\vec r)+\int G_0^{(\pm)}(\vec r-\vec r\,')U(\vec r\,')\phi_k^{(\pm)}(\vec r\,')d\vec r\,' \qquad (1.44)$$

Здесь $\phi_k^{(\pm)}(\vec r)$- волновые функции задачи рассеяния, в асимптотике которых содержатся, соответственно, расходящиеся (сходящиеся) сферические волны; $\varphi_k(\vec r)$-плоско волновое решение, поэтому функция не имеет индексов $(\pm)$. В задаче о рассеянии на потенциале требуются функции $\phi_k^{(+)}(\vec r)$, однако ниже будет рассмотрена задача, в которой используются функции $\phi_k^{(-)}(\vec r)$. Формулы (1.41) и (1.43) дают **координатные представления** для одночастичной функции Грина.

9. Установим связь между потенциалом взаимодействия и амплитудой рассеяния. Волновая функция $\phi_k^{(+)}(\vec r)$ имеет следующий асимптотический вид:

$$\phi_k^{(+)}(\vec r)\underset{\vec r\to\infty}{\to}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\{e^{i\vec k\vec r}+f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\}$$

Подставим выражение для $G_0^{(+)}(\vec r-\vec r\,')$ (см. ф. (1.41)) в интегральное уравнение (1.44):

$$\phi_k^{(+)}(\vec r)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec k\vec r}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik/\vec r-\vec r\,'/}}{/\vec r-\vec r\,'/}\cdot U(\vec r\,')\phi_k^{(+)}(\vec r\,')d\vec r\,' \qquad (1.45)$$

При достаточно больших $\vec r$ можно положить:

$$\frac{1}{/\vec r-\vec r\,'/}\sim\frac{1}{r} \qquad (1.46)$$

$$/\vec r-\vec r\,'/=\sqrt{r^2-2\vec r\vec r\,'+(r')^2}\sim r\sqrt{1-\frac{2\vec r\vec r\,'}{r^2}}\sim r-(\vec n\vec r\,') \qquad (1.47)$$

Здесь $\vec n$ - единичный вектор, направленный параллельно вектору $\vec r$. Подставляя (1.46) и (1.47) в (1.45), получим:

$$\phi_k^{(+)}(\vec r)\underset{\vec r\to\infty}{\Rightarrow}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec k\vec r}-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int\varphi_{k'}^*(\vec r\,')U(\vec r\,')\phi_k^{(+)}(\vec r\,')d\vec r\,' \qquad (1.48)$$

где $$\varphi_{k'}(\vec r\,')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot e^{i\vec k'\vec r\,'},\qquad \vec k\,'=\vec nk \qquad (1.49)$$

Сравнивая выражения (1.17) и (1.48), будем иметь:

$$f(\theta)=-\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\left\langle\varphi_{k'}\left|U\right|\phi_k^{(+)}\right\rangle \qquad (1.50)$$

Используя соотношение $\hat{U} = (2m/\hbar^2)\hat{V}$, окончательно получаем:

$$f(\theta) = -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2} \cdot \left\langle \varphi_{k'} \middle| \hat{V} \middle| \phi_k^{(+)} \right\rangle \tag{1.51}$$

Для сечения рассеяния будем, соответственно, иметь:

$$\sigma(\theta) = \frac{(2\pi)^4 m^2}{\hbar^4} / \left\langle \varphi_{k'} \middle| \hat{V} \middle| \phi_k^{(+)} \right\rangle /^2 \tag{1.52}$$

Формулы (1.51) и (1.52) устанавливают связь между потенциалом взаимодействия и амплитудой и сечением рассеяния. Задавая потенциал из физических соображений и решая уравнение задачи рассеяния с определенными граничными условиями, можно построить $f(\theta)$ и $\sigma(\theta)$. Сравнение теоретических сечений с экспериментальными дает возможность проверить исходные предположения о характере взаимодействия.

10. Для обобщения предыдущего рассмотрения введем операторную форму записи уравнения Шредингера:

$$(\hat{H}_0 + \hat{V} - E)\left|\phi_\varepsilon\right\rangle = 0 \tag{1.53}$$

Здесь оператор $\hat{H}_0$ включает в себя оператор Гамильтона мишени и оператор кинетической энергии налетающей частицы, но не включает оператор взаимодействия между сталкивающимися частицами. Таким образом, $\hat{H}_0$ является **невозмущенным** (взаимодействием) гамильтонианом. В формуле (1.53) $\hat{V}$ - оператор взаимодействия между налетающей частицей и мишенью. Преобразуя уравнение (1.53), получаем:

$$(E - \hat{H}_0)\left|\phi_E\right\rangle = \hat{V}\left|\phi_E\right\rangle \tag{1.54}$$

Введем операторы Грина, координатное и импульсное представление которых, было рассмотрено выше:

$$G_0^{(\pm)}(E) = \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon} \tag{1.55}$$

Здесь мнимые добавки $\pm i\varepsilon$ соответствуют выбору контуров $C_+$ и $C_-$ и асимптотическим условиям в виде расходящейся (сходящейся) сферической волны на бесконечности. Действуя формально оператором Грина на правую и левую часть соотношения (1.54), будем иметь:

$$\left|\phi_E^{(\pm)}\right\rangle = \left|\varphi_E\right\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon} \cdot \hat{V}\left|\phi_E^{(\pm)}\right\rangle \tag{1.56}$$

Уравнение (1.56) есть операторная запись **уравнения Липпмана-Швингера.** Состояния $\left|\varphi_E\right\rangle$ являются собственными состояниями невозмущенного гамильтониана:

$$\hat{H}_o\left|\varphi_E\right\rangle = E\left|\varphi_E\right\rangle \tag{1.57}$$

Используя свойство полноты состояний $\left|\varphi_E\right\rangle$ и переходя в (1.56) к координатному представлению, получаем:

$$\phi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1 .... \vec{r}_N) = \varphi_E(\vec{r}_1 .... \vec{r}_N) +$$
$$+ \int \frac{dE'}{E - E' \pm i\varepsilon} \cdot \int \varphi_{E'}^*(\vec{r}_1{}' ... \vec{r}_N{}') V(\vec{r}_1{}' ..... \vec{r}_N{}') \varphi_E^{(\pm)}(\vec{r}_1{}' ... \vec{r}_N{}') \cdot d\vec{r}_1{}' ..... d\vec{r}_N{}' \cdot$$
$$\cdot \varphi_{E'}(\vec{r}_1 ..... \vec{r}_N) \tag{1.58}$$

Здесь $\vec{r}_1 ...... \vec{r}_N$ - координаты всех частиц, входящих в состав сталкивающихся тел.

Отметим преимущества использования в теории рассеяния уравнений Липпмана-Швингера по сравнению с уравнениями Шредингера: 1).могут быть описаны не только упругие процессы, 2).может быть применение в представлении вторичного квантования в квантовой теории поля, 3). допустимо использование релятивистского формализма. Сравнение формул (1.58) и (1.44) показывает эквивалентность обоих подходов в случае описания упругого рассеяния.

11. Наряду со свободным оператором Грина (1.55) введем в рассмотрение оператор Грина с учетом взаимодействия:

$$G^{(\pm)}(E) = \frac{1}{E - \hat{H} \pm i\varepsilon} \tag{1.59}$$

Здесь $\hat{H}$ - оператор Гамильтона, включающий в себя невозмущенный гамильтониан и оператор взаимодействия:

$$\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{V} \tag{1.60}$$

Для получения уравнения, которому удовлетворяет оператор $G^{(\pm)}(E)$, рассмотрим операторное соотношение:

$$\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{B}} \cdot (\hat{B} - \hat{A}) \cdot \frac{1}{\hat{A}} \tag{1.61}$$

Положим:

$$\hat{A} \equiv E - \hat{H} + i\varepsilon \tag{1.62}$$

$$\hat{B} \equiv E - \hat{H}_o + i\varepsilon$$

Подставляя (1.62) в (1.61), будем иметь:

$$\frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon} - \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon} = \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon} \cdot \hat{V} \cdot \frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon}$$

или

$$\frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon} = \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon} + \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon} \cdot \hat{V} \cdot \frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon} \tag{1.63}$$

Соотношение (1.63) можно рассматривать, как операторное уравнение для оператора Грина
$G^{(\pm)}(E)$. Используя (1.55) и (1.59), получаем:

$$G^{(+)}(E) = G_o^{(+)}(E) + G_o^{(+)}(E) \cdot \hat{V} \cdot G^{(+)}(E) \tag{1.64}$$

Решая уравнение (1.64) методом последовательных приближений, будем иметь выражение для $G^{(+)}(E)$ в виде бесконечного ряда:

$$G^{(+)}(E) = G_o^{(+)}(E) + G_o^{(+)}(E)\hat{V}G_o^{(+)}(E) + G_o^{(+)}(E)\hat{V}G_o^{(+)}(E)\hat{V}G_o^{(+)}(E) + ..... \tag{1.65}$$

12. Найдем <u>**формальное решение**</u> уравнения Липпмана-Швингера. Снова используем соотношение (1.61), положив теперь:

$$\hat{A} \equiv E - \hat{H}_o + i\varepsilon \tag{1.66}$$

$$\hat{B} \equiv E - \hat{H} + i\varepsilon$$

Подставляя (1.66) в (1.61), получим:

$$\frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon} - \frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon} = -\frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon} \cdot \hat{V} \cdot \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon} \tag{1.67}$$

Применяя (1.55) и (1.59), будем иметь вместо (1.67) :

$$G_o^{(+)}(E) = G^{(+)}(E) - G^{(+)}(E)\hat{V}G_o^{(+)}(E) \qquad (1.68)$$

Перепишем уравнение (1.56) в следующем виде:

$$\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle = \left|\varphi_E\right\rangle + G_o^{(+)}(E)\hat{V}\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle \qquad (1.69)$$

Подставляя (1.68) в(1.69), получаем:

$$\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle = \left|\varphi_E\right\rangle + G^{(+)}(E)\hat{V}\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle - G^{(+)}(E)\hat{V}G_o^{(+)}(E)\hat{V}\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle =$$

$$= \left|\varphi_E\right\rangle + G^{(+)}(E)\hat{V}\left[\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle - G_o^{(+)}(E)\hat{V}\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle\right] =$$

$$= \left|\varphi_E\right\rangle + G^{(+)}(E)\hat{V}\left|\varphi_E\right\rangle \qquad (1.70)$$

Используя (1.59), будем иметь:

$$\left|\phi_E^{(+)}\right\rangle = \left|\varphi_E\right\rangle + \frac{1}{E - \hat{H} + i\varepsilon}\cdot\hat{V}\left|\varphi_E\right\rangle \qquad (1.71)$$

Соотношение (1.71) и есть искомое формальное решение уравнения Липпмана-Швингера. Оно является решением поскольку правая часть этого соотношения не содержит вектора состояния $\left|\phi^{(+)}(E)\right\rangle$. Это решение является формальным, поскольку для построения $\left|\phi^{(+)}(E)\right\rangle$ по формуле (1.71) необходимо знать спектр состояний полного гамильтониана, т.е. фактически необходимо решить уравнение Шредингера (1.53).1).Однако, если задать гамильтониан $\hat{H}$ в рамках некоторой простой модели, позволяющей найти его собственные значения, то соотношение (1.71) дает возможность построить приближенные решения задачи рассеяния. 2). Кроме того, это соотношение полезно для введения в рассмотрение оператора переходов.