§ 3. Борновское приближение в квантовой теории рассеяния.

1. Как следует из вышеизложенного, для нахождения сечения рассеяния необходимо построить функцию $\varphi_k^{(+)}$ (см. формулу (1.52)) , а чтобы построить $\varphi_k^{(+)}$, нужно решить интегральное уравнение (1.44). Даже в простейшем случае потенциального рассеяния уравнение (1.44) является трехмерным интегральным уравнением, и его решение становится громоздкой вычислительной задачей.В связи с этим были разработаны различные приближенные методы решения уравнения (1.44). Один из этих методов был предложен Борном. Уравнение (1.44) может решаться методом последовательных приближений. В качестве нулевого по взаимодействию приближения возьмем для $\varphi_k^{(+)}(\vec{r})$

$$\phi_k^{(+)}(\vec{r}) \approx \varphi_k(\vec{r}) \qquad (1.93)$$

Подставляя (1.93) в (1.50), будем иметь:

$$f^B(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\cdot(2\pi)^3\int\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot e^{-i\vec{k}'\vec{r}'}U(r')\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot e^{i\vec{k}\vec{r}'}d\vec{r}' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\vec{q}\vec{r}'}U(r')d\vec{r}' \qquad (1.94)$$

Здесь введен переданный импульс $\vec{q}$:

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}' \qquad (1.95)$$

Предполагая взаимодействие центральным, т.е. независящим от направления вектора $\vec{r}'$, проинтегрируем в (1.94) по направлениям $\vec{r}'$:

$$2\pi\int_{-1}^{1} e^{iqr'x}dx = \frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{2iqr'}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{\sin(qr')}{qr'}\cdot 4\pi \qquad (1.96),$$

где $x = \cos(\vec{q},\vec{r}')$.

Подставляя (1.96) в (1.94) , получаем для амплитуды рассеяния :

$$f^B(\theta) = -\frac{1}{q}\cdot\int_0^\infty U(r')\sin(qr')r'dr' \qquad (1.97)$$

$$q = 2k\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1.98)$$

Выражение (1.97) и есть **борновское приближение для амплитуды рассеяния.** Можно видеть, что борновская амплитуда является выражением 1-го порядка по потенциалу взаимодействия. Используя связь между сечением рассеяния и амплитудой рассеяния, будем иметь для **сечения рассеяния в борновском приближении:**

$$\sigma^B(\theta) = \frac{1}{q^2}\cdot/\int_0^\infty U(r')\sin(qr')r'dr'/^2 \qquad (1.99)$$

С учетом (1.98) получаем, что:

$$\sigma^B(E) \sim \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad (1.100)$$

На эту основную зависимость сечения от угла рассеяния налагается также зависимость, определяемая фактором $\sin(qr')$. Можно видеть, что сечение растет с уменьшением угла рассеяния. Снова учитывая (1.98), а также соотношение $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot E$, будем иметь:

$$\sigma^B(E) \sim \frac{1}{E} \qquad (1.101)$$

В борновском приближении сечение обратно пропорционально энергии налетающей частицы.

2. Формула (1.97) дает так называемое **первое борновское приближение.** Используя метод последовательных приближений при решении уравнения (1.44), получаем:

$$\phi_k^{(+)}(\vec{r}) = \varphi_k(\vec{r}) + \int G_O^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}\,')U(r')\varphi_k(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' +$$
$$+ \iint G_O^{(+)}(\vec{r} - \vec{r}\,')U(r')G_O^{(+)}(\vec{r}\,' - \vec{r}\,'')U(r'')\varphi_k(\vec{r}\,'')d\vec{r}\,'d\vec{r}\,'' + \ldots \quad (1.102)$$

или в операторной форме:

$$\left|\phi_k^{(+)}\right\rangle = \left|\varphi_k\right\rangle + G_o^{(+)}(E)\hat{V}\left|\varphi_k\right\rangle + G_o^{(+)}(E)\hat{V}G_o^{(+)}(E)\hat{V}\left|\varphi_k\right\rangle + \ldots\ldots \qquad (1.103)$$

Подставляя (1.103) в (1.51), получаем **борновский ряд** для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta) = -\frac{(2\pi)^2 m}{\hbar^2}\left\{\left\langle\varphi_{k'}\left|\hat{V}\right|\varphi_k\right\rangle + \left\langle\varphi_{k'}\left|\hat{V}G_o^{(+)}(E)\hat{V}\right|\varphi_k\right\rangle + \ldots\ldots\right\} \qquad (1.104)$$

Здесь первое слагаемое в скобках дает первое борновское приближение, а второе слагаемое – второе борновское приближение для амплитуды рассеяния. Весьма существенным является вопрос о сходимости борновского ряда. Исследование этого вопроса связано с решением громоздкой вычислительной задачи. Проведенные исследования показали, что критерием сходимости ряда (1.104) является условие:

$$E >> /V/ \qquad (1.105)$$

Рассмотрим насколько реализуется условие (1.105) в задаче рассеяния в ядерной физике. Пусть нуклон рассеивается на ядре-мишени.Глубина ядерной потенциальной ямы для нуклона, как установлено, равна примерно – 50 МэВ. Таким образом, из соотношения (1.105) следует , что борновское приближение для нуклонов применимо при $E \geq 200$ МэВ. Еще более сильные ограничения на энергии налетающих частиц налагаются для составных частиц: дейтонов, α-частиц, тяжелых ионов. Таким образом, можно заключить, что борновское приближение неприменимо для описания упругого рассеяния в ядерных реакциях при низких энергиях.

В заключение этой части параграфа отметим, что согласно формуле(1.94) амплитуда рассеяния в борновском приближении простым образом связана с потенциалом взаимодействия : борновская амплитуда есть **фурье-образ** потенциала взаимодействия. Для ее нахождения нет необходимости решать уравнение Шредингера.

3. Во многих реальных физических ситуациях взаимодействие в системе двух сталкивающихся тел может быть представлено в виде суммы двух слагаемых. Тогда вместо (1.53) будем иметь:

$$(\hat{H}_O + \hat{V}_A + \hat{V}_B - E)\left|\phi_E\right\rangle = 0 \qquad (1.106)$$

В зависимости от постановки задачи операторам $\hat{V}_A$ и $\hat{V}_B$ может придаваться различный смысл. Рассмотрим типичные случаи: 1. При рассеянии заряженной частицы $\hat{V}_A$ ответственно за кулоновское взаимодействие, а $\hat{V}_B$ - за ядерное взаимодействие; 2. $\hat{V}_A$ может индуцировать дальнодействующее взаимодействие, а $\hat{V}_B$ - короткодействующее взаимодействие; 3. наконец, можно считать $\hat{V}_A$ ответственным за упругие процессы, а $\hat{V}_B$ - за неупругие.

Согласно формуле (1.76) для элемента Т-матрицы получаем:

$$T_{fi} = \left\langle \varphi_f \right| \cdot \left(\hat{V}_A + \hat{V}_B\right) \cdot \left| \phi_i^{(+)} \right\rangle \qquad (1.107),$$

где вектор состояния $\left|\varphi_f\right\rangle$ является решением уравнения (1.106) без учета взаимодействия, а $\left|\phi_i^{(+)}\right\rangle$ - решение полного уравнения Шредингера (1.106). Эти вектора состояний в соответствии с (1.56) связаны уравнением:

$$\left|\phi_i^{(+)}\right\rangle = \left|\varphi_i\right\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon}\left(\hat{V}_A + \hat{V}_B\right)\left|\phi_i^{(+)}\right\rangle \qquad (1.108)$$

Введем в рассмотрение вектора состояний $\left|\Phi_f\right\rangle$, являющиеся решением уравнения Шредингера, включающего только оператор взаимодействия $\hat{V}_B$:

$$\left(\hat{H}_o + \hat{V}_B - E\right)\left|\Phi_f\right\rangle = 0 \qquad (1.109)$$

Вектора состояний $\left|\Phi_f^{(\pm)}\right\rangle$ связаны с $\left|\varphi_f\right\rangle$ уравнением:

$$\left|\Phi_f^{(\pm)}\right\rangle = \left|\varphi_f\right\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_o \pm i\varepsilon} \cdot \hat{V}_B \left|\Phi_f^{(\pm)}\right\rangle \qquad (1.110)$$

Выразим $\left|\varphi_f\right\rangle$ из соотношения (1.110):

$$\left|\varphi_f\right\rangle = \left|\Phi_f^{(-)}\right\rangle - \frac{1}{E - \hat{H}_o - i\varepsilon} \cdot \hat{V}_B \left|\Phi_f^{(-)}\right\rangle \qquad (1.111)$$

Подставляя (1.111) в (1.107), будем иметь:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_A \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle + \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_B \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle - \\ &- \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_B \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon}\left(\hat{V}_A + \hat{V}_B\right) \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle = \\ &= \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_A \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle + \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_B \middle| \varphi_i \right\rangle + \\ &+ \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_B \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon}\left(\hat{V}_A + \hat{V}_B\right) \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle - \\ &- \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_B \frac{1}{E - \hat{H}_o + i\varepsilon}\left(\hat{V}_A + \hat{V}_B\right) \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle \end{aligned} \qquad (1.112)$$

При получении соотношения (1.112) использована формула (1.108). Сокращая в (1.112) третье и четвертое слагаемые, окончательно получаем:

$$T_{fi} = \left\langle \varphi_f \middle| \hat{V}_B \middle| \Phi_i^{(+)} \right\rangle + \left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_A \middle| \phi_i^{(+)} \right\rangle \qquad (1.113)$$

Здесь, опуская вывод, учитываем, что:

$$\left\langle \Phi_f^{(-)} \middle| \hat{V}_B \middle| \varphi_i \right\rangle = \left\langle \varphi_f \middle| \hat{V}_B \middle| \Phi_i^{(+)} \right\rangle \qquad (1.114)$$

Формула (1.113) есть **двухпотенциальная формула Геллмана-Гольдбергера.** Особенностью этой формулы является то, что каждый из операторов взаимодействия дает вклад в отдельное слагаемое в Т-матрице, т.е. эффекты, связанные с операторами $\hat{V}_A$ и $\hat{V}_B$, разделены. Другой особенностью формулы

(1.113) является присутствие в ней состояний , асимптотики которых содержат сходящиеся сферические волны. Полагая в (1.113) приближенно $\left|\phi_i^{(+)}\right\rangle \sim \left|\Phi_i^{(+)}\right\rangle$, получаем:

$$T_{fi}^{B} = \left\langle \varphi_f \left| \hat{V}_B \right| \Phi_i^{(+)} \right\rangle + \left\langle \Phi_f^{(-)} \left| \hat{V}_A \right| \Phi_i^{(+)} \right\rangle \qquad (1.115)$$

Здесь T_{fi}^{B} -матрица переходов **<u>в борновском приближении с искаженными волнами.</u>** Первое слагаемое в (1.115) описывает процесс рассеяния (“искажения”) падающей плоской волны на потенциале взаимодействия $\hat{V}_B$, а второе слагаемое описывает переходы между “искаженными ” состояниями под действием оператора $\hat{V}_A$, причем вместо вектора состояния $\left|\phi_i^{(+)}\right\rangle$во втром слагаемом берется его борновское приближение по оператору взаимодействия $\hat{V}_A$. Таким образом, в выражении (1.115) точно учитывается оператор взаимодействия $\hat{V}_B$ и в первом борновском приближении $\hat{V}_A$. Формула (1.115) является основой теории прямых ядерных реакций, при этом предполагается, что оператор $\hat{V}_B$ответственен за упругие процессы и он должен быть, по возможности , учтен точно, а оператор $\hat{V}_A$ ответственен за неупругие процессы и может быть учтен приближенно.