§ 4.Метод парциальных амплитуд.

1. Вернемся к исходной постановке задачи рассеяния. Имеем уравнение Шредингера:

$$(\Delta + k^2)\phi^{(+)}(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)\phi^{(+)}(\vec{r}) \qquad (1.16)$$

и соответствующее ему граничное условие :

$$\phi_k(\vec{r}) \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left\{e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right\} \qquad (1.17)$$

$$\vec{r} \to \infty$$

Удобно для получения амплитуды рассеяния провести редукцию трехмерного уравнения (1.16) к системе одномерных расщепляющихся уравнений. Для этой цели будем искать $\phi(\vec{r})$ в следующем виде:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l R_l(r)P_l(\cos\theta) \qquad (1.116)$$

Здесь $P_l(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра, а $R_l(r)$ - l-компонента радиальной части волновой функции. Подставляя (1.116) в (1.16) и учитывая ортогональность полиномов Лежандра, получим:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right\}R_l(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)R_l(r) \qquad (1.117)$$

В силу конечности функции $\phi(\vec{r})$ радиальная функция $R_l(r)$ стремится к 0, когда $r \to 0$.

Плоская волна также может быть разложена по парциальным волнам:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta) \qquad (1.118)$$

Здесь $j_l(kr)$ - сферическая функция Бесселя порядка l:

$$j_l(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \cdot J_{l+1/2}(\xi) = (-1)^l \xi^l \left(\frac{d}{\xi d\xi}\right)^l \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right) \qquad (1.119)$$

Для $j_l(kr)$ имеют место следующие асимптотические соотношения:

$$j_l(kr) \to \frac{1}{kr}\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1.120)$$

$$r \to \infty$$

Учитывая (1.120), для плоской волны можно записать:

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} \to \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot i^l \frac{1}{kr}\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)\cdot P_l(\cos\theta) =$$

$$r \to \infty$$

$$= \frac{1}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot i^{l+1}\left\{e^{-i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}\right\}P_l(\cos\theta) \qquad (1.121)$$

Сравнивая (1.121) с (1.116) , получаем для асимптотики $R_l^o(r)$ радиальной части волновой функции, построенной без учета взаимодействия:

$$R_l^o(r) \sim \frac{i}{2}\left\{e^{-i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}\right\} \qquad (1.122)$$

В процессе рассеяния на потенциале амплитуда сходящейся части плоской волны не меняется, в то время как амплитуда расходящейся части меняется. С учетом этого асимптотика радиальной части волновой функции $R_l(r)$ может быть представлена в виде:

$$R_l(r) \sim \frac{i}{2}\left\{e^{-i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} - S_l e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}\right\} \qquad (1.123)$$

где величина S_l –характеризует степень изменения амплитуды расходящейся волны. Сделаем в соотношении (1.123) тождественное преобразование:

$$R_l(r) \sim \frac{i}{2}\left\{e^{-i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} +\right.$$

$$\left. + \left(1 - S_l\right) \cdot e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) + \frac{i}{2}\left(1 - S_l\right) \cdot e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (1.124)$$

Подставляя (1.124) в (1.116), будем иметь для асимптотики волновой функции $\phi(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r}) \underset{r \to \infty}{\to} \frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) \cdot i^l \left\{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right) + \frac{i}{2}\left(1 - S_l\right) \cdot e^{i\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}\right\} P_l(\cos\theta) \qquad (1.125)$$

С другой стороны:

$$\phi(r) \underset{r \to \infty}{\to} e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (1.126)$$

Сравнивая (1.126) с (1.121) и (1.125), получаем:

$$f(\theta) = \frac{1}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(2l+1\right) \cdot i^{l+1}\left(1 - S_l\right) e^{-il\frac{\pi}{2}} P_l(\cos\theta) \qquad (1.127)$$

Учитывая, что $e^{-il\frac{\pi}{2}} = (-i)^l$, окончательно имеем:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \cdot \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1) \cdot (1 - S_l) \cdot P_l(\cos\theta) \qquad (1.128)$$

Можно показать, что величина S_l является элементом **S-матрицы в представлении моментов.** Таким образом, формула (1.128) дает связь между амплитудой рассеяния и парциальными элементами матрицы рассеяния.

2. Представим S_l в виде:

$$S_l = e^{2i\delta_l} \tag{1.129}$$

Величина δ_l называется **фазой рассеяния или фазовым сдвигом.** Согласно (1.123) она определяет сдвиг по фазе амплитуды расходящейся волны. Из (1.129) следует, что

$$S_l - 1 = 2ie^{i\delta_l}\sin\delta_l \tag{1.130}$$

Подставляя (1.130) в (1.128), получаем для дифференциального сечения рассеяния:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{k^2}\sum_{ll'}(2l+1)(2l'+1)\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\cos(\delta_l - \delta_{l'})P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta) \tag{1.131}$$

Найдем выражение для интегрального сечения рассеяния:

$$\sigma = \int \sigma(\theta)d\Omega \tag{1.132}$$

Подставляя в (1.132) формулу (1.131) и проводя интегрирование с учетом ортогональности полиномов Лежандра, получаем:

$$\sigma = \frac{1}{k^2}\sum_{ll'}\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}(2l+1)(2l'+1)\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\cos(\delta_l - \delta_{l'}) =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{1.133}$$

Интегральное сечение согласно (1.133) можно представить как сумму **парциальных сечений**:

$$\sigma = \sum_l \sigma_l \tag{1.134}$$

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{1.135}$$

Здесь σ_l - парциальное сечение рассеяния, соответствующее падающей частице с моментом l . Из формулы (1.130) следует, что:

$$4\sin^2\delta_l = /1 - S_l/^2 \tag{1.136}$$

Подставляя (1.136) в (1.135) , будем иметь:

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)\cdot /1 - S_l/^2 \tag{1.137}$$

Соотношение (1.137) дает связь между парциальным сечением и элементом матрицы рассеяния.

При использовании метода парциальных амплитуд в анализе экспериментальных данных существенным является вопрос о сходимости разложения (1.134). Сделаем квазиклассическую оценку тех значений l , которые нужно учитывать при описании с помощью (1.134) -(1.137) упругого рассеяния. Пусть вдоль оси OZ на мишень падает поток частиц (см. рис. 1.3.) и “b” есть **прицельный параметр,** т.е. кратчайшее расстояние от налетающей частицы до оси OZ. Если R - радиус мишени, то рассеяние налетающей частицы в результате ее взаимодействия с мишенью произойдет при условии:

$$b \le R \tag{1.138}$$

или

$$\hbar kb \le \hbar kR \tag{1.139}$$

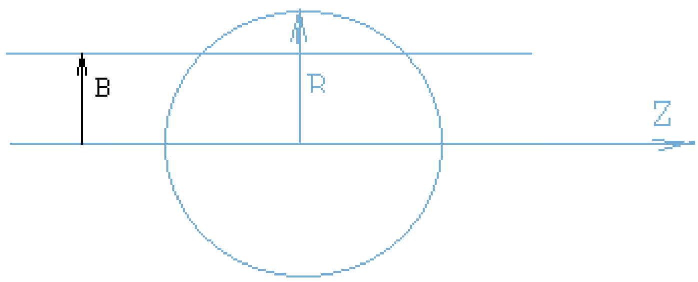

Рис.1.3.

Величина $\hbar kb$ есть классический момент количества движения. Выражая его в единицах $\hbar$, получаем:

$$l \le kR \qquad (1.140)$$

Соотношение (1.140) и показывает какие l нужно учитывать в $\sum\limits_l$. Значение k простым образом связано с энергией налетающей частицы и ее массой:

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} \qquad (1.141)$$

Из уравнения (1.140) с (1.141) видно, что сходимость разложения по парциальным сечениям тем быстрее, чем меньше масса налетающей частицы, размеры мишени и энергия налетающей частицы.

Таким образом, метод парциальных амплитуд удобно применять при описании упругого рассеяния легких частиц (p, n, d, ^{3}He, α) низких энергий (E$\le$100 МэВ) на ядрах. В этом смысле этот метод является дополнительным по отношению к борновскому приближению, которое, наоборот, не применимо при низких энергиях.

До сих пор предполагалось, что рассматривается рассеяние бесспиновой частицы на мишени. Это рассмотрение может быть обобщено на случай описания рассеяния частицы со спином. В этом случае элемент S-матрицы и, следовательно, фаза рассеяния может зависеть от полного момента j:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \qquad (1.142)$$

Для определенности будем считать, что спин налетающей частицы равен $1/2$. Тогда согласно схеме сложения двух угловых моментов $/\vec{j}/$ может принимать значения $l - 1/2$ и $l + 1/2$ и для каждой парциальной волны будем иметь две фазы рассеяния $\delta_{ll-1/2}$ и $\delta_{ll+1/2}$. Соответственно:

$$S_{lj} = \exp\left(2i\delta_{lj}\right) \qquad (1.143)$$

Интегральное сечение рассеяния может быть получено в следующем виде:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l \left\{(l+1)\sin^2\delta_{ll+1/2} + l\sin^2\delta_{ll-1/2}\right\} \qquad (1.144)$$

Формула (1.144) является обобщением формул (1.134) и (1.135). Если фазы $\delta_{ll-1/2}$ и $\delta_{ll+1/2}$ зависят от j (например, при учете спин-орбитального взаимодействия), то (1.144) и (1.134) -(1.135) приводят к различным описаниям упругого рассеяния. Если же фазы не зависят от j, то формула (1.144) сводится к выражениям (1.134) -(1.135). Действительно, полагая $\delta_{ll-\frac{1}{2}}=\delta_{ll+\frac{1}{2}}=\delta_l$ и подставляя эти соотношения в (1.144), получаем формулы (1.134) -(1.135).

При достаточно низких энергиях вклад в $\sum\limits_l$ дают несколько парциальных сечений, причем вклад отдельных сечений зависит от энергии налетающей частицы. Это обстоятельство позволяет при анализе экспериментальных данных выделить вклад отдельных слагаемых в (1.134) и, таким образом, получить значения для фаз рассеяния. Такая процедура получила название **фазового анализа.** Анализ фаз рассеяния, полученных в рамках фазового анализа , для широкого энергетического интервала позволяет сделать заключения о силе и характере взаимодействия налетающей частицы с мишенью, о резонансных свойствах системы сталкивающихся тел.

В заключении параграфа рассмотрим **оптическую теорему**. Найдем связь между амплитудой рассеяния и интегральным сечением. Для амплитуды рассеяния имеем:

$$f(\theta)=\frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\cdot\left(1-S_l\right)P_l(\cos\theta) \qquad (1.128)$$

Подставляя сюда (1.130), получаем для амплитуды рассеяния на нулевой угол:

$$f(0)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}e^{i\delta_l}\sin\delta_l\cdot(2l+1) \qquad (1.145)$$

Сравнивая (1.145) с (1.134) -(1.135) , будем иметь:

$$\sigma=\frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} f(0) \qquad (1.146)$$

Выражение (1.146) и есть оптическая теорема для упругого рассеяния. Согласно этой теореме интегральное сечение рассеяния пропорционально мнимой части амплитуды рассеяния на нулевой угол. Соотношение (1.146) обобщается на случай неупругого рассеяния:

$$\sum_f \sigma_{fi}=\frac{4\pi}{k_i}\operatorname{Im} f_i(0) \qquad (1.147)$$

Здесь $\sum\limits_f$ является суммой по всем неупругим каналам, а индекс “i” относится к упругому каналу. Соотношение (1.147) выражает оптическую теорему для неупругого рассеяния. Аналогичные соотношения существуют в теории оптических явлений, отсюда соответствующая терминология.