§6. Метод проекционных операторов Фешбаха.

1. Первоначально теория ядерных реакций развивалась таким образом, что для описания различных механизмов одной и той же реакции использовались различные подходы. Фешбахом был развит метод, который позволяет на единой основе описывать различные механизмы ядерных реакций. Этот метод основан на использовании проекционных операторов.

Запишем в операторной форме уравнение (2.1):

$$\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle \tag{2.14}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \tag{2.15}$$

Определим понятие открытых и закрытых каналов. Будем считать канал **открытым**, если полная энергия системы E, т.е. энергия налетающей частицы больше ε_k - энергии возбуждения ядра в данном канале. Соответственно, канал является **закрытым**, если E<ε_k. Таким образом, в случае перехода системы в закрытый канал налетающая частица может остаться в состоянии сплошного спектра только в том случае, если этот переход **виртуальный**, т.е. идет без сохранения энергии. Введем в рассмотрение операторы проектирования. Оператор $\hat{P}$, по определению, из всего пространства состояний $|\phi\rangle$ выделяет состояния, отвечающие открытым каналам, а оператор $\hat{Q}$ - состояния, отвечающие закрытым каналам. Как операторы проектирования, операторы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ обладают следующими свойствами:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}, \qquad \hat{Q}^2 = \hat{Q} \tag{2.16}$$

$$\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0 \tag{2.17}$$

$$\hat{P} + \hat{Q} = \hat{I} \tag{2.18}$$

Здесь $\hat{I}$ - единичный оператор. Важнейшим свойством операторов $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ является их зависимость от энергии.

Вставим в уравнение (2.14) единичный оператор в соответствии с соотношением (2.18):

$$\hat{H}\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)|\phi\rangle - E\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)|\phi\rangle = 0 \tag{2.19}$$

Действуя поочередно операторами $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ слева на уравнение (2.19), получаем:

$$\left(\hat{H}_{PP} - E\right)\cdot\left|\hat{P}\phi\right\rangle = -H_{PQ}\left|\hat{Q}\phi\right\rangle \tag{2.20}$$

$$\left(\hat{H}_{QQ} - E\right)\cdot\left|\hat{Q}\phi\right\rangle = -H_{QP}\left|\hat{P}\phi\right\rangle \tag{2.21}$$

Здесь использованы соотношения (2.16) и (2.17) и введены следующие обозначения:

$$\hat{H}_{PP} \equiv \hat{P}\hat{H}\hat{P}, \quad \hat{H}_{QQ} \equiv \hat{Q}\hat{H}\hat{Q}, \quad \hat{H}_{QP} \equiv \hat{Q}\hat{H}\hat{P}, \quad \hat{H}_{PQ} \equiv \hat{P}\hat{H}\hat{Q} \tag{2.22}$$

Уравнения (2.20) и (2.21) представляют собой систему зацепляющихся уравнений. Зацепление происходит за счет связи закрытых и открытых каналов. Решая формально уравнение (2.21), будем иметь:

$$\left|\hat{Q}\phi\right\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_{QQ}}\hat{H}_{QP}\left|\hat{P}\phi\right\rangle \tag{2.23}$$

Подставляя решение (2.23) в правую часть (2.20), получим:

$$\left(\hat{H}_{PP}+\hat{H}_{PQ}\frac{1}{E-\hat{H}_{QQ}}\hat{H}_{QP}-E\right)\cdot\left|\hat{P}\phi\right\rangle=0 \qquad (2.24)$$

Соотношение (2.24) является основным уравнением в методе проекционных операторов Фешбаха. Его решение дает описание открытых каналов с учетом их связи с закрытыми каналами. Выделим в операторе $\hat{H}_{PP}$ оператор кинетической энергии налетающей частицы:

$$\hat{H}'_{PP}=\hat{H}_{PP}-T \qquad (2.25)$$

Введем обозначение:

$$\hat{H}''_{PP}\equiv\hat{H}_{PQ}\frac{1}{E-\hat{H}_{QQ}}\hat{H}_{QP} \qquad (2.26)$$

В соответствии с (2.25) и (2.26) будем вместо (2.24) иметь:

$$\left(\hat{T}+\hat{H}'_{PP}+\hat{H}''_{PP}-E\right)\cdot\left|\hat{P}\phi\right\rangle=0 \qquad (2.27)$$

Уравнение (2.24) называется **<u>эффективным уравнением Шредингера,</u>** а величина $\hat{H}'_{PP}+\hat{H}''_{PP}$ **<u>обобщенным оптическим потенциалом</u>** (ООП).

2. Рассмотрим свойства ООП. Выделим в подпространстве открытых каналов упругий канал $\left|\hat{P}_o\phi\right\rangle$, состояния неупругих каналов обозначим $\left|\hat{P}'\phi\right\rangle$, так что $\hat{P}_o+\hat{P}'=\hat{P}$. Проделывая преобразования, аналогичные преобразованиям из п.1, получим для обобщенного оптического потенциала:

$$\hat{U}_{ООП}=\hat{H}'_{P_oP_o}+\hat{H}_{P_oP'}\frac{1}{E-\hat{H}_{P'P'}}\hat{H}_{P'P_o}+\hat{H}_{P_oQ}\frac{1}{E-\hat{H}_{QQ}}\hat{H}_{QP_o} \qquad (2.28)$$

В выражении (2.28) для простоты опущена связь состояний $\left|\hat{P}'\phi\right\rangle$ с состояниями $\left|\hat{Q}\phi\right\rangle$. В соответствии с (2.28) $\hat{U}_{ООП}$ состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое обусловлено потенциалом в упругом канале, во второе слагаемое дает вклад связь упругого канала с неупругим,а в третье слагаемое – упругого канала с закрытыми каналами. Пусть оператор $\hat{H}_{P'P'}$ имеет собственные состояния $\left|\Phi(E_k,\varepsilon,\alpha)\right\rangle$, а оператор $\hat{H}_{QQ}$ - $\left|\Phi_n\right\rangle$:

$$\hat{H}_{P'P'}\left|\Phi(E_k,\varepsilon,\alpha)\right\rangle=(E_k+\varepsilon)\left|\Phi(E_k,\varepsilon,\alpha)\right\rangle \qquad (2.29)$$

$$\hat{H}_{QQ}\left|\Phi_n\right\rangle=\in_n\left|\Phi_n\right\rangle \qquad (2.30)$$

Здесь E_k - энергия возбуждения ядра-мишени., ε - энергия налетающей частицы в состоянии сплошного спектра, α - квантовые числа, характеризующие вырождение состояний сплошного спектра, $\in_n$ -энергии связанных состояний всей системы. Используя свойство полноты собственных состояний операторов $\hat{H}_{P'P'}$ и $\hat{H}_{QQ}$, получаем для $\hat{U}_{ООП}$:

$$\hat{U}_{ООП} = \hat{H}'_{P_o P_o} + \sum_{\alpha k} \int \hat{H}_{P_o P'} \frac{\left|\Phi(\varepsilon, E_k, \alpha)\right\rangle \left\langle \Phi(\varepsilon, E_k, \alpha)\right|}{\left(E - \varepsilon - E_k\right) + i\eta} \hat{H}_{P'P_o}\, d\varepsilon +$$

$$+ \sum_{n} \hat{H}_{P_o Q} \frac{\left|\Phi_n\right\rangle \left\langle \Phi_n\right|}{E - E_n} \hat{H}_{QP_o} \qquad (2.31)$$

Малая мнимая добавка $i\eta$ в знаменателе второго слагаемого учитывает граничные условия для состояний открытых каналов. Для интеграла по энергии может быть использовано соотношение Коши:

$$\int \frac{F(\varepsilon)d\varepsilon}{E - \varepsilon + i\eta} = -i\pi F(E) + V.p.\int \frac{F(\varepsilon)d\varepsilon}{E - \varepsilon} \qquad (2.32)$$

Здесь V.p. обозначает интеграл **в смысле главного значения.** С учетом (2.32) получаем для второго слагаемого в (2.31):

$$\sum_{\alpha k} \int \hat{H}_{P_o P'} \frac{\left|\Phi(\varepsilon, E_k, \alpha)\right\rangle \left\langle \Phi(\varepsilon, E_k, \alpha)\right|}{\left(E - \varepsilon - E_k\right) + i\eta} \hat{H}_{P'P_o}\, d\varepsilon =$$

$$= -\sum_{k\alpha} \hat{H}_{P_o P'} \left|\Phi(E - E_k, E_k, \alpha)\right\rangle \left\langle \Phi(E - E_k, E_k, \alpha)\right| \hat{H}_{P'P_o} \cdot i\pi + V.p. \qquad (2.33)$$

Таким образом, $\hat{U}_{ООП}$ является **комплексным** и мнимая часть его обусловлена связью упругого канала с неупругими каналами. Из формулы (2.31) следует, что обобщенный оптический потенциал является **нелокальным.** Действительно, третье слагаемое, например, в координатном представлении может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{n} \hat{H}_{P_o Q} \frac{\left|\Phi_n\right\rangle \left\langle \Phi_n\right|}{E - E_n} \hat{H}_{QP_o} \to \sum_{n} \hat{H}_{P_o Q}(\vec{r}) \frac{\Phi_n^*(\vec{r})\Phi_n(\vec{r}\,')}{E - E_n} \hat{H}_{QP_o}(\vec{r}\,') \qquad (2.34)$$

Аналогичный вид в координатном представлении имеет второе слагаемое. Из (2.34) следует, что $\hat{U}_{ООП}$ действует на волновую функцию интегральным образом и его действие зависит от поведения функции во всей области пространства, а не в отдельной точке, как в случае локального оператора:

$$\int \hat{U}_{ООП}(\vec{r}, \vec{r}\,')\phi(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' \qquad (2.35)$$

Для $\hat{U}_{ООП}\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)$ можно построить локальный оператор следующим образом:

$$\int \hat{U}_{ООП}(\vec{r}, \vec{r}\,')\phi(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' \cdot \frac{\phi(\vec{r})}{\phi(\vec{r})} = \mathcal{U}_{ООП}(\vec{r})\phi(\vec{r}) \qquad (2.36),$$

где

$$\mathcal{U}_{ООП}(\vec{r}) = \int \hat{U}_{ООП}(\vec{r}, \vec{r}\,')\phi(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' / \phi(\vec{r}) \qquad (2.37)$$

Величина $\mathcal{U}_{ООП}(\vec{r})$ называется **тривиально эквивалентным локальным потенциалом.**

Еще одно важное свойство $\hat{U}_{ООП}$ состоит в том, что он зависит от энергии налетающей частицы, причем согласно (2.31) и (2.32) связь упругого канала с открытыми каналами дает слабую энергетическую зависимость, а связь с закрытыми каналами – сильную энергетическую зависимость.

Название “обобщенный оптический потенциал” связано с тем, что этот потенциал является обобщением потенциала, используемого в так называемой оптической модели. В чем состит это обобщение и каковы свойства потенциала оптической модели, будет рассмотрено в последующих разделах.

3. Перейдем к описанию механизмов реакции в методе Фешбаха. Имеем эффективное уравнение Шредингера:

$$\left(\hat{T}+\hat{H}'_{PP}+\hat{H}''_{PP}-E\right)\cdot\left|\hat{P}\phi\right\rangle=0 \qquad (2.27),$$

где $\hat{H}'_{PP}$ и $\hat{H}''_{PP}$ определены соотношениями (2.25) и (2.26). Для нахождения матрицы переходов, соответствующей уравнению (2.27), применим двухпотенциальную формулу Геллмана-Гольдбергера (см. формулу (1.113)). В результате получаем:

$$T_{fi}=\left\langle\varphi_f\left|\hat{H}'_{PP}\right|(\hat{P}\phi)^{(+)}_{oi}\right\rangle+\left\langle\left(\hat{P}\phi\right)^{(-)}_{of}\left|\hat{H}''_{PP}\right|\left(\hat{P}\phi\right)^{(+)}_{i}\right\rangle \qquad (2.38)$$

Здесь $\left|\varphi_f\right\rangle$- собственное состояние свободного гамильтониана, не включающего взаимодействие налетающей частицы с мишенью;$\left|\left(\hat{P}\phi\right)_{ok}\right\rangle$ -собственное состояние оператора $\hat{H}_{PP}$:

$$\hat{H}_{PP}\left|\left(\hat{P}\phi\right)_{ok}\right\rangle=E\left|\left(\hat{P}\phi\right)_{ok}\right\rangle \qquad (2.39)$$

где индекс “0” означает, что эти состояния строятся в нулевом приближении по связи открытых и закрытых каналов. Состояния $\left|\left(\hat{P}\phi\right)^{(+)}_{i}\right\rangle$ связаны с состояниями $\left|\left(\hat{P}\phi\right)^{(+)}_{oi}\right\rangle$ следующим уравнением Липпмана-Швингера:

$$\left|\left(\hat{P}\phi\right)^{(+)}_{i}\right\rangle=\left|\left(\hat{P}\phi\right)^{(+)}_{oi}\right\rangle+\frac{1}{E-\hat{H}_{PP}+i\varepsilon}\hat{H}''_{PP}\left|\left(\hat{P}\phi\right)^{(+)}_{i}\right\rangle \qquad (2.40)$$

Выражение (2.38) является точным выражением для матрицы переходов в методе Фешбаха. В нем $\hat{H}'_{PP}$- оператор взаимодействия, не содержащий связи открытых каналов с закрытыми и слабо зависящий от энергии, $\hat{H}''_{PP}$ - оператор взаимодействия, содержащий связь открытых каналов с закрытыми и сильно зависящий от энергии. Следуя Фешбаху, будем считать, что прямой механизм реакции связан с $\hat{H}'_{PP}$, а непрямые механизмы, т.е. резонансные и статистические связаны с $\hat{H}''_{PP}$. Тогда первое слагаемое в (2.38) есть матрица переходов для прямых процессов, а второе слагаемое – для непрямых процессов.Такое предположение естественно, поскольку эмпирически установлено, что резонансные процессы сильно зависят от энергии. Кроме того, для образования связанного резонансного состояния в соответствии с законом сохранения энергии необходим переход системы из открытого канала в закрытый. Таким образом, формула (2.38) позволяет единым образом описать прямой и резонансный (а при определенных предположениях и статистический) механизмы реакции. В силу этого метод Фешбаха получил название **единой теории ядерных реакций.**

Рассмотрим отдельно второй, резонансный, член в формуле (2.38). Подставим в него явное выражение для $\hat{H}''_{PP}$:

$$T^{res}_{fi}=\left\langle(P\phi)^{(-)}_{of}\left|\hat{H}_{PQ}\frac{1}{E-\hat{H}_{QQ}}\hat{H}_{QP}\right|(P\phi)^{(+)}_{i}\right\rangle \qquad (2.41)$$

Используя (2.40), получим:

$$T_{fi}^{res} = \left\langle (P\phi)_{of}^{(-)} \middle| H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \middle| (P\phi)_{oi}^{(+)} \right\rangle + \tag{2.42}$$

$$+ \left\langle (P\phi)_{of}^{(-)} \middle| H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \middle| (P\phi)_{oi}^{(+)} \right\rangle + ...$$

Здесь использовано разложение $\left| (P\phi)_i^{(+)} \right\rangle$ в ряд по оператору H''_{PP}.

Просуммируем выражение в (2.42), стоящее между операторами H_{PQ} и H_{QP}:

$$\frac{1}{E - H_{QQ}} + \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} + \tag{2.43}$$

$$\frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} + ...$$

Введем следующие обозначения:

$$G_Q^o \equiv \frac{1}{E - H_{QQ}} \tag{2.44}$$

$$V \equiv H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \tag{2.45}$$

С учетом этих обозначений перепишем сумму в (2.43):

$$G_Q^o + G_Q^o V G_Q^o + G_Q^o V G_Q^o V G_Q^o + ... \tag{2.46}$$

Согласно формулам (1.63) и (1.65) ряд (2.46) является оператором Грина с учетом взаимодействия V. Таким образом, ряд (2.43) может быть просуммирован. В результате получаем:

$$\frac{1}{E - H_{QQ} - H_{QP} \dfrac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ}} \tag{2.47}$$

Подставляя (2.47) вместо (2.43), будем иметь для резонансной матрицы переходов:

$$T_{fi}^{res} = \left\langle (P\phi)_{of}^{(-)} \middle| H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ} - H_{QP} \dfrac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ}} H_{QP} \middle| (P\phi)_{oi}^{(+)} \right\rangle \tag{2.48}$$

Можно видеть, что замена в (2.41) вектора состояния $\left| (P\phi)_i^{(+)} \right\rangle$ на вектор состояния $\left| (P\phi)_{oi}^{(+)} \right\rangle$ сводится к суммированию бесконечного ряда (2.43) и появлению вследствие этого комплексной добавки в энергетическом знаменателе. Выражение (2.48) является основой для описания резонансных , а также статистических процессов в методе проекционных операторов.