§ 10. Метод связанных каналов.

1. Во второй главе был рассмотрен метод сильной связи каналов. Была получена следующая система связанных уравнений:

$$\left[H_{op}(\vec r) + V_{nn}(\vec r) - E_n\right] \cdot f_n(\vec r) = -\sum_{n \neq n'}^{N} V_{nn'}(\vec r) f_{n'}(\vec r) \qquad (2.7)$$

$$n = 1 ....N$$

Эта система является основой для описания неупругих процессов в ядерных реакциях при наличии сильной связи каналов. В (2.7) $V_{nn}(\vec r)$ - матричные элементы связи каналов от оператора полного взаимодействия налетающей частицы с ядром-мишенью:

$$V_{nn'}(\vec r) = \int \Phi_n^*(\vec r_1 ......\vec r_A) V(\vec r, \vec r_1 .....\vec r_A) \Phi_{n'}(\vec r_1 ......\vec r_A) d\vec r_1 ......d\vec r_A \qquad (2.8)$$

Чтобы применить формализм МССК к описанию неупругого рассеяния нуклонов на ядрах, произведем перестройку гамильтониана всей системы. В соответствии с **концепцией среднего поля** выделим из полного взаимодействия налетающего нуклона с ядром-мишенью **потенциал среднего поля.** Этот потенциал есть усредненное действие нуклонов ядра-мишени на налетающий нуклон. То, что останется после выделения потенциала среднего поля, называется **остаточным взаимодействием.** Таким образом, будем иметь:

$$V(\vec r, \vec r_1 .....\vec r_A) = U_{cp}(\vec r) + V_{ocm}(\vec r, \vec r_1 .....\vec r_A) \qquad (4.29)$$

Теперь для системы связанных уравнений получаем:

$$\left[H_{op}(\vec r) + V_{nn,\,ocm}(\vec r) - E_n\right] \cdot f_n(\vec r) = -\sum_{n' \neq n}^{N} V_{nn',\,ocm}(\vec r) f_{n'}(\vec r) \qquad (4.30)$$

В отличие от (2.7) в формуле (4.30) содержится кроме оператора кинетической энергии, потенциал среднего поля:

$$H_{op}(\vec r) = T(\vec r) + U_{cp}(\vec r) \qquad (4.31),$$

а $V_{nn',ocm}(\vec r)$ являются матричными элементами от оператора остаточного взаимодействия:

$$V_{nn',\,ocm}(\vec r) = \int \Phi_n^*(\vec r_1 ......\vec r_A) V_{ocm}(\vec r, \vec r_1 .....\vec r_A) \Phi_{n'}(\vec r_1 ......\vec r_A) d\vec r_1 ......d\vec r_A \qquad (4.32)$$

Выделение потенциала среднего поля из полного взаимодействия может быть проведено строго, например, в рамках метода Хартри-Фока. Здесь будем следовать приближенной процедуре, принятой в **коллективной модели неупругого рассеяния.** Рассмотрим основные черты этой модели. Полагается, что полное взаимодействие $V(\vec r, \vec r_1 ....\vec r_A)$ можно заменить на нуклонный потенциал, который зависит не только от радиальной координаты налетающего нуклона, но и от его угловых переменных, а также от коллективных переменных ядра-мишени:

$$V(\vec r, \vec r_1 ....\vec r_A) \to V(r, \theta, \varphi; \alpha_{\lambda\mu}) \qquad (4.33),$$

где $\alpha_{\lambda\mu}$ - **коллективные переменные** ядра-мишени. Гамильтониан ядра-мишени заменяется на коллективный гамильтониан:

$$H_A(\vec r, \vec r_1 ....\vec r_A) \to H_{колл} \qquad (4.34)$$

Основным объектом приложений коллективной модели неупругого рассеяния является рассеяние частиц на четно-четных ядрах.

2. Выделим согласно (4.29) из полного взаимодействия потенциал среднего поля и остаточное взаимодействие. Пусть радиус половинного спада потенциала, действующего на налетающий нуклон , зависит от угловых переменных:

$$R(\theta,\varphi)=R_o\left[1+\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right] \qquad (4.35)$$

Здесь R_o - радиус половинного спада, отвечающий сферически-симметричной части потенциала. Учтено, что любое отклонение от сферической симметрии может быть разложено по полной ортонормированной системе сферических гармоник $Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)$. Коэффициенты разложения $\alpha_{\lambda\mu}$ имеют смысл коллективных переменных ядра-мишени . Используя (4.35), осуществим замену (4.33). В результате будем иметь:

$$V(r,\vartheta,\varphi;\alpha_{\lambda\mu})=\frac{V_o}{1+\exp\dfrac{r-R_o\left[1+\sum\limits_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right]}{a}} \qquad (4.36)$$

Разложим этот потенциал в ряд Тейлора вблизи точки $(r-R_o)$:

$$V(r-R(\theta,\varphi))=V(r-R_o)-R_o\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\frac{\partial V(r-R_o)}{\partial r}+$$

$$+\frac{1}{2}R_o^2\Big[\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\Big]^2\frac{\partial^2V(r-R_o)}{\partial r^2}+\ldots\ldots \qquad (4.37)$$

В качестве потенциала среднего поля примем сферически-симметричную часть взаимодействия налетающего нуклона с ядром-мишенью:

$$U_{cp}(\vec{r})=V(r-R_o) \qquad (4.38),$$

а остаточным взаимодействием будем считать отклонение формы потенциала от сферически-симметричной:

$$V_{ocm}(r,\theta,\varphi;\alpha_{\lambda\mu})=-R_o\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\frac{\partial V(r-R_o)}{\partial r}+$$

$$+\frac{1}{2}R_o^2\Big[\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\Big]^2\frac{\partial^2V(r-R_o)}{\partial r^2}+\ldots\ldots \qquad (4.39)$$

Различают ротационный и вибрационный варианты коллективной модели неупругого рассеяния. Рассмотрим сначала ротационный вариант. Перейдем в $\sum\limits_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)$ от лабораторной системы координат (ЛСК) к собственной системе координат (ССК), жестко связанной с осями симметрии ядра-мишени:

$$\sum_{\lambda\mu}\alpha_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\to\sum_{\lambda}\beta_\lambda Y_{\lambda o}(\theta',\varphi') \qquad (4.40)$$

Подробно этот переход рассматривается в учебниках по теории ядра, поэтому на нем останавливаться не будем. В формуле (4.40) сделано предположение, что распределение вещества в ядре аксиально-симметричное, β_λ - **параметры статической деформации,** θ',φ' - угловые переменные налетающего нуклона в

ССК. Чтобы получить искомое выражение для $V_{ост}$, сделаем переход назад в ЛСК. В результате получаем:

$$\sum_{\lambda}\beta_{\lambda}Y_{\lambda o}(\theta',\varphi')=\sum_{\lambda}\sum_{\mu}\beta_{\lambda}D^{*\lambda}_{\mu o}(\alpha,\beta,\gamma)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) \qquad (4.41)$$

Здесь $D^{\lambda}_{\mu o}(\alpha,\beta,\gamma)$- обобщенные сферические функции (D-функции), зависящие как от аргументов, от углов Эйлера α,β,γ. С помощью углов Эйлера задается ориентация ЛСК относительно ССК, и наоборот. Правая часть выражения (4.41) и левая часть (4.40) заданы в ЛСК, однако, преимущество в записи формулы (4.41) состоит в том, что в нее явно входят характеристики ядра-мишени – параметры деформации β_{λ} и D-функции, которые формально приводят к связи каналов в ротационном варианте коллективной модели неупругого рассеяния. Подставляя (4.41) в (4.39), будем иметь для остаточного взаимодействия в первом порядке по β_{λ}:

$$V^{(1)}_{ост}(r,\theta,\varphi;\beta_{\lambda})=-\frac{\partial V(r)}{\partial r}R_o\sum_{\lambda\mu}\beta_{\lambda}D^{*\lambda}_{\mu o}(\alpha,\beta,\gamma)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) \qquad (4.42)$$

Аналогично строится выражение для остаточного взаимодействия во втором порядке по β_{λ}.

Для сильно деформированных ядер (β_{λ}>0.3) изложенная процедура получения $V_{ост}$, основанная на разложении (4.39), может оказаться неудовлетворительной из-за медленной сходимости по β_{λ}. В этом случае используется более точная процедура построения $V_{ост}$, не связанная с разложением (4.39). Разложим $V_{ост}$ в ССК в ряд по мультиполям:

$$V_{ост}(r,\theta',\varphi')=\sum_{\lambda}u_{\lambda o}(r)Y_{\lambda o}(\theta',\varphi') \qquad (4.43)$$

Домножая правую и левую части (4.43) на $Y^{*}_{\lambda' o}(\theta',\varphi')$, интегрируя по угловым переменным и учитывая соотношение ортонормированности для сферических гармоник, в результате получаем:

$$u_{\lambda o}(r)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}V_{ост}(r,\theta',\varphi')Y^{*}_{\lambda o}(\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi' \qquad (4.44)$$

Подставляя (4.36) в (4.44), будем иметь:

$$u_{\lambda o}(r)=\int\frac{Y^{*}_{\lambda o}(\omega')d\omega'}{1+\exp\dfrac{r-R_o\left[1+\sum_{\lambda}\beta_{\lambda}Y_{\lambda o}(\omega')\right]}{a}} \qquad (4.45)$$

Здесь для простоты ω' обозначены угловые координаты θ',φ'. Величины $u_{\lambda o}(r)$ называются **<u>радиальными форм-факторами неупругих переходов</u>** (ФНП). Интегральное представление для радиального ФНП содержит все порядки по параметрам деформации β_{λ}. Форм-фактор первого порядка согласно (4.42) равен:

$$u^{(1)}_{\lambda o}(r)=-\beta_{\lambda}R_o\frac{\partial V(r)}{\partial r} \qquad (4.46)$$

Для применения коллективной модели неупругого рассеяния в ротационном варианте помимо $V_{ост}$ нужно задать коллективный гамильтониан. Этот гамильтониан строится на основе ротационной модели ядра.

Рассмотрим вибрационный вариант коллективной модели. В этом варианте ядро рассматривается, колеблющимся вблизи равновесного состояния, так что переменные $\alpha_{\lambda\mu}$ описывают колебания ядра. Помимо $\alpha_{\lambda\mu}$ можно ввести соответствующие им обобщенные импульсы $\pi_{\lambda\mu}$. В терминах $\alpha_{\lambda\mu}$ и $\pi_{\lambda\mu}$ дается полное классической описание колебаний ядерной поверхности. Для построения квантовомеханического описания необходимо классические величины $\alpha_{\lambda\mu}$ и $\pi_{\lambda\mu}$ заменить на соответствующие операторы. Обычно вместо операторов $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ и $\hat{\pi}_{\lambda\mu}$ рассматривают их линейные суперпозиции – операторы $\hat{b}_{\lambda\mu}$ и $\hat{b}^{+}_{\lambda,\mu}$. Стандартная замена $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ на $\hat{b}_{\lambda\mu}$ и $\hat{b}^{+}_{\lambda,\mu}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\alpha}_{\lambda\mu} \Rightarrow \frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}\left[\hat{b}_{\lambda\mu} + (-)^{\mu}\hat{b}^{+}_{\lambda,-\mu}\right] \qquad (4.47)$$

Здесь $\sqrt{2\lambda+1}$ - нормировочный множитель, а β_λ - **параметр динамической деформации ядра,** т.е. деформации, возникающей в процессе колебаний поверхности ядра относительно равновесной , сферически-симметричной формы, $\hat{b}^{+}_{\lambda,\mu}$ и $\hat{b}_{\lambda\mu}$ - операторы, соответственно, рождения и уничтожения фононов с моментом λ и проекцией μ.

Заменим в (4.39) $\alpha_{\lambda\mu}$ на операторы рождения и уничтожения фононов согласно формуле (4.47). В результате получаем:

$$V_{ост}(r,\theta,\varphi;\hat{b}_{\lambda\mu},\hat{b}^{+}_{\lambda\mu}) = -R_o\frac{\partial V(r)}{\partial r}\sum_{\lambda\mu}\frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}\left[\hat{b}_{\lambda\mu} + (-)^{\mu}\hat{b}^{+}_{\lambda,-\mu}\right]\cdot Y_{\lambda\mu}(\omega) +$$

$$+\frac{1}{2}R_o^2\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}\sum_{\lambda_1\mu_1}\frac{\beta_{\lambda_1}}{\sqrt{2\lambda_1+1}}\left[\hat{b}_{\lambda_1\mu_1} + (-)^{\mu_1}\hat{b}^{+}_{\lambda_1,-\mu_1}\right]\cdot\sum_{\lambda_2\mu_2}\frac{\beta_{\lambda_2}}{\sqrt{2\lambda_2+1}}\cdot$$

$$\cdot\left[\hat{b}_{\lambda_2\mu_2} + (-)^{\mu_2}\hat{b}^{+}_{\lambda_2,-\mu_2}\right]Y_{\lambda_1\mu_1}(\omega)Y_{\lambda_2\mu_2}(\omega) \qquad (4.48)$$

Чтобы привести члены первого и второго порядка в (4.48) к единообразной форме, используем теорему умножения для сферических гармоник:

$$Y_{\lambda_1\mu_1}(\omega)Y_{\lambda_2\mu_2}(\omega) = \sum_{\lambda\mu}\sqrt{\frac{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)}{4\pi(2\lambda+1)}}C(\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2\,|\,\lambda\mu)C(\lambda_1 0\lambda_2 0\,|\,\lambda 0)Y_{\lambda\mu}(\omega) \qquad (4.49)$$

Подставляя (4.49) в (4.48), окончательно будем иметь:

$$V_{ост}(r,\theta,\varphi;\hat{b}^{+}_{\lambda\mu},\hat{b}_{\lambda\mu}) = -R_o\frac{\partial V}{\partial r}\sum_{\lambda\mu}\frac{\beta_\lambda}{\sqrt{2\lambda+1}}\left[\hat{b}_{\lambda\mu} + (-)^{\mu}\hat{b}^{+}_{\lambda,-\mu}\right]\cdot Y_{\lambda\mu}(\omega) +$$

$$+\frac{1}{2}R_o^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\sum_{\lambda\mu}\sum_{\lambda_1\mu_1}\sum_{\lambda_2\mu_2}\sqrt{\frac{(2\lambda_1+1)(2\lambda_2+1)}{4\pi(2\lambda+1)}}\cdot C(\lambda_1\mu_1\lambda_2\mu_2\,|\,\lambda\mu)C(\lambda_1 0\lambda_2 0\,|\,\lambda 0)\cdot$$

$$\cdot\frac{\beta_{\lambda_1}}{\sqrt{2\lambda_1+1}}\cdot\frac{\beta_{\lambda_2}}{\sqrt{2\lambda_2+1}}\left[\hat{b}_{\lambda_1\mu_1}+(-)^{\mu_1}\hat{b}^{+}_{\lambda_1,-\mu_1}\right]\left[\hat{b}_{\lambda_2\mu_2}+(-)^{\mu_2}\hat{b}^{+}_{\lambda_2,-\mu_2}\right]Y_{\lambda\mu}(\omega) \quad (4.50)$$

В этом выражении члены первого порядка по параметрам динамической деформации ответственны за возбуждение ядра-мишени **с передачей одного фонона,** а члены второго порядка - за возбуждение ядра-мишени **с передачей двух фононов.**

Отметим, что в отличие от ротационного варианта в вибрационном варианте невозможно построить аналог интегрального представления (4.45) , а оператор взаимодействия должен быть разложен по фононным операторам. Это обстоятельство не является существенным дефектом теории, т.к. значения параметров динамической деформации β_λ для большинства ядер меньше 0.25, что обеспечивает достаточно хорошую сходимость разложения (4.50). Для применения коллективной модели неупругого рассеяния в вибрационном варианте помимо $V_{ост}$ нужно задать коллективный гамильтониан. Этот гамильтониан строится на основе вибрационной модели ядра.

В том случае, когда колебания ядерной поверхности происходят относительно равновесной формы, отличной от сферически-симметричной, возбуждение ядра-мишени описывают в рамках **ротационно-вибрационной модели.** Остаточное взаимодействие в этом случае описывается более громоздким выражением, являющимся обобщением формул (4.42) и (4.50). На этом останавливаться не будем.

3. Ранее (в главе II) отмечалось, что непосредственное разложение по парциальным волнам в системе (4.30) приводит к большому числу связанных уравнений. Действительно, даже для трехканальной задачи в случае учета 50-ти парциальных волн в каждом канале получаем систему из 150 связанных дифференциальных уравнений, что приводит к громоздкой вычислительной задаче. Чтобы избежать этого, будем строить базисные состояния, как собственные состояния оператора квадрата углового момента всей системы $\hat{J}^2$ и его проекции на ось OZ $\hat{J}_Z$. Система: налетающий нуклон + ядро-мишень – описывается следующим уравнением Шредингера:

$$[T(\vec{r})+U_{ср}(\vec{r})+\hat{H}_{колл}+\hat{V}_{ост}-E]\phi(\vec{r},\vec{r}_1.......\vec{r}_A)=0 \quad (4.51)$$

Здесь коллективный гамильтониан и остаточное взаимодействие записаны в операторной форме, поскольку они имеют различную координатную зависимость для ротационного и вибрационного варианта. Пусть $\Phi_{I_n m_n}$ - собственные функции коллективного гамильтониана:

$$H_{колл}\Phi_{I_n m_n}=E_{I_n m_n}\Phi_{I_n m_n} \quad (4.52)$$

В ротационном варианте $\Phi_{I_n m_n}$ - функции вращающегося волчка, а в вибрационном варианте – функции фононных состояний. Имеем следующую схему сложения угловых моментов:

$$\vec{l}_n+\vec{s}=\vec{j}_n \quad (4.53)$$

$$\vec{j}_n+\vec{I}_n=\vec{J} \quad (4.54)$$

Здесь $\vec{l}_n$ - орбитальный момент налетающего нуклона в n-ом канале, а s – его спиновый момент. Спин-угловая часть волновой функции нуклона может быть записана в виде **шарового или обобщенного спинора:**

$$\Omega_{l_n j_n m_j}(\omega) = \sum_{m_l m_s} C(l_n m_l s m_s \mid j_n m_j) i^{l_n} Y_{l_n m_l}(\omega)\chi_{sm_s} \qquad (4.55)$$

где χ_{sm_s} - спинор, а i^l - фазовый множитель. Используя (4.54) для базисных состояний, как собственных состояний оператора квадрата углового момента всей системы и его проекции, будем иметь:

$$\varphi_{JMI_n l_n j_n} = \sum_{m_j m_n} C(j_n m_j I_n M_n \mid JM)\Omega_{l_n j_n m_j} \Phi_{I_n M_n} \qquad (4.56)$$

Разложим полную волновую функцию всей системы по базисным состояниям (4.56):

$$\phi_{JM} = \frac{1}{r}\sum_{I_n l_n j_n} R_{JI_n l_n j_n}(r) \cdot \sum_{m_j m_n} C(j_n m_j I_n M_n \mid JM)\Omega_{l_n j_n m_j} \Phi_{I_n M_n} \qquad (4.57)$$

Подставляя (4.57) в (4.51) и учитывая (4.52), а также ортонормированность функций $\Phi_{I_n M_n}$, $Y_{l_n m_l}$ спиноров χ_{sm_s}, получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l_n(l_n+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V_{cp} + V_{ocmI_n l_n j_n, I_n l_n j_n}(r)\right) + \right.$$
$$\left. + k_n^2\right\} R_{JI_n l_n j_n}(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\sum_{l'_n j'_n I'_n}{}' V_{ocm.I_n l_n j_n, I'_n l'_n j'_n}(r) R_{JI'_n l'_n j'_n} \qquad (4.58),$$

где матричные элементы связи каналов определяются соотношениями:

$$V_{I_n l_n j_n, I'_n l'_n j'_n}(r) = \left\langle \left(\Omega_{l_n j_n} \otimes \Phi_{I_n}\right)_{JM} \middle| V_{ocm} \middle| \left(\Omega_{l'_n j'_n} \otimes \Phi_{I'_n}\right)_{JM} \right\rangle \qquad (4.59)$$

Здесь $\otimes$ - знак прямого произведения, означающий операцию, содержащуюся в выражении (4.56).

Система (4.58) есть система зацепляющихся дифференциальных уравнений для радиальных функций $R_{JI_n l_n j_n}(r)$. Решение этой системы с определенными граничными условиями дает возможность найти элементы S-матрицы, таким образом, построить сечения упругого и неупругого рассеяния. В отличие от (4.30) эта система является одномерной. Ранг системы (4.58) определяется значениями J и числом рассматриваемых каналов и не зависит от числа парциальных волн, т.е. от энергии налетающей частицы. Действительно, пусть полный момент системы фиксирован. Пусть спин ядра-мишени I_n, тогда согласно (4.54) j_n может принимать значения:

$$/ J - I_n / \le j_n \le J + I_n \qquad (4.60),$$

т.е. всего $(2I_n + 1)$ значений. Для нуклона согласно (4.53) при фиксированном j_n орбитальный момент l_n принимает два значения:

$$l_n = j_n \pm \tfrac{1}{2} \qquad (4.61)$$

Таким образом, при фиксированном J полное число связанных уравнений равно:

$$N = \sum_n 2\left(2I_n + 1\right) \qquad (4.62)$$

Рассмотрим в качестве примера трехканальную задачу с состояниями ядра мишени $\left|0^+\right\rangle, \left|2^+\right\rangle u \left|4^+\right\rangle$. В соответствии с формулой (4.62) будем иметь:

$$\mathrm{N} = 2\cdot 1 + 2\cdot 5 + 2\cdot 9 = 30 \qquad (4.63)$$

Отметим, что это максимальное число уравнений для данного J. При малых значениях J действуют дополнительные ограничения, и значение N меньше, чем определяемое формулой (4.63). Система (4.58) является основной системой уравнений метода связанных каналов (МСК). Имеются различные программные версии МСК. Основные из них – программы ECIS и СНИСК.

4. Рассмотрим угловые распределения рассеянных нуклонов. Для состояния всей системы имеем:

$$\left|\varphi_{i\mu_s}\right\rangle = \left|\vec{k} s \mu_s I M_A\right\rangle \qquad (4.64)$$

$$\left|\varphi_{f\mu'_s}\right\rangle = \left|\vec{k}' s \mu'_s I' M'_A\right\rangle \qquad (4.65)$$

Здесь штрихованными (нештрихованными) квантовыми числами помечены конечное (начальное) состояние системы. Перейдем к представлению квадрата углового момента всей системы и его проекции:

$$\left|\vec{k} s \mu_s I M_A\right\rangle = \sum_{lj} \sum_{JM} i^l Y^*_{lM-M_A-\mu_s}(\vec{k}) C(lM - M_A - \mu_s s \mu_s \cdot | jM - M_A) \cdot$$

$$\cdot C(IM_A jM - M_A | JM) \left| JMljI \right\rangle \qquad (4.66)$$

Аналогичное соотношение имеет место для состояния (4.65). Подставляя эти соотношения в Т-матрицу, получим:

$$\left\langle \vec{k}' s \mu_s{}' I' M'_A \left| T \right| \vec{k} s \mu_s I M_A \right\rangle = \sum_{JM} \sum_{ljl'j'} i^{l-l'} Y^*_{lM-M_A-\mu_s}(\vec{k}) \cdot$$

$$\cdot Y_{l'M-M'_A-\mu'_s}(\vec{k}') C(lM - M_A - \mu_s s \mu_s \cdot | jM - M_A) \cdot C(IM_A jM - M_A | JM) \cdot$$

$$\cdot C(l'M - M'_A - \mu'_s s \mu'_s \cdot | j'M - M'_A) \cdot C(I'M'_A j'M - M'_A | JM) \cdot$$

$$\cdot \left\langle JMl'j'I' \left| T \right| JMljI \right\rangle \qquad (4.67)$$

Для дифференциального сечения рассеяния имеем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar^4} \mu^2 \frac{k'}{k} \frac{1}{(2I+1)(2s+1)} \sum_{\mu_s \mu'_s} \sum_{M_A M'_A} \left| \left\langle \vec{k}' s \mu'_s I' M'_A \left| T \right| \vec{k} s \mu_s I M_A \right\rangle \right|^2 \qquad (4.68)$$

Здесь

$$k = \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}\right)^{1/2} \qquad (4.69)$$

$$k' = \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - E_{I'}\right)\right]^{1/2} \qquad (4.70)$$

Подставляя (4.67) в (4.68) и суммируя по магнитным числам, окончательно получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi^2}{\hbar^4} \mu^2 \frac{k'}{k} \frac{1}{(2s+1)} \sum_L B_L P_L(\cos\theta) \qquad (4.71)$$

$$B_L = \sum_{lj l' j' J} \sum_{\tilde{l}\tilde{j}\tilde{l}'\tilde{j}'\tilde{J}} (-1)^{I'-I} (2J+1)(2\tilde{J}+1) Z(lj\tilde{l}\tilde{j} \mid \tfrac{1}{2} L) \cdot$$
$$\cdot Z(l'j'\tilde{l}'\tilde{j}' \mid \tfrac{1}{2} L) \cdot W(jJ\tilde{j}\tilde{J} \mid IL) W(j'J\tilde{j}'\tilde{J} \mid I'L) \cdot$$
$$\cdot \left| \langle JMl'j'I' | T | JMljI \rangle \langle \tilde{J}\tilde{M}\tilde{l}'\tilde{j}'\tilde{I}' | T | \tilde{J}\tilde{M}\tilde{l}\tilde{j}\tilde{I} \rangle \right| \qquad (4.72)$$

Здесь $Z(j_1 j_2 j_3 j_4 \mid j_5 j_6)$ - **<u>коэффициенты Блатта-Биденхарна</u>** (Z-коэффициенты), а $W(j_1 j_2 j_3 j_4 \mid j_5 j_6)$ - **<u>коэффициенты Рака</u>**. Для прямых процессов нет ограничений на значения L, и в сечение рассеяния могут давать вклад как четные, так и нечетные значения L. Чтобы определить форму угловых распределений, рассмотрим явный вид полиномов Лежандра $P_L(\cos\theta)$:

$$P_0(\cos\theta) = 1 \qquad (4.73)$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \qquad (4.74)$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \qquad (4.75)$$

Таким образом, B_0 дает изотропный вклад в угловое распределение, B_1 - анизотропный и B_2 - симметричный относительно 90°. Z- и W-коэффициенты имеют максимальное значение для малых L, так что :

$$B_0 > B_1 > B_2 \qquad (4.76)$$

Отсюда следует, что дифференциальные сечения рассеяния для прямых процессов будут обладать сильной анизотропией в угловых распределениях, что и наблюдается на эксперименте.

Из формулы (4.71) может быть получено простое выражение для интегрального сечения рассеяния:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{4\pi^3}{\hbar^4} \mu^2 \frac{k'}{k} B_0 \qquad (4.77)$$

Рассмотрим правила отбора для рассеяния нуклонов на ядрах. Эти правила задаются правилами “треугольника”, содержащимися в Z- и W-коэффициентах:

$$\Delta(lj\ \tfrac{1}{2}) \qquad \Delta(\tilde{l}\tilde{j}\ \tfrac{1}{2}) \qquad \Delta(l'j'\ \tfrac{1}{2}) \qquad \Delta(\tilde{l}\tilde{j}'\ \tfrac{1}{2}) \qquad (4.78)$$

$$\Delta(jJI) \qquad \Delta(\tilde{j}\tilde{J}I) \qquad \Delta(j'JI') \qquad \Delta(\tilde{j}'\tilde{J}I') \qquad (4.79)$$

Здесь выписаны основные правила “треугольника”. Сечение рассеяния будет равно нулю, если хотя бы одно из этих правил не выполняется, а именно не выполняется условие:

$$| j_1 - j_2 | \le j_3 \le j_1 + j_2, \qquad \Delta(j_1 j_2 j_3) \qquad (4.80)$$

Таким образом, эти правила дают правила отбора для значений угловых моментов частиц (налетающей и ядра-мишени), участвующих в реакции.

Отметим, что разложение (4.71) является общим и не зависит от того, в какой модели вычисляются элементы T- или S-матрицы. Это может быть оптическая модель для упругого рассеяния, метод связанных каналов или **<u>метод искаженных волн</u>** для неупругого рассеяния.

5. При низких энергиях нуклонов вклад в сечение рассеяния могут давать не только прямой и статистический (см. следующую главу) механизмы, но и отдельные резонансные состояния составной системы. В этом случае из экспериментального сечения рассеяния вычитают вклад статистического механизма:

$$\sigma_{fi}^{n+p} = \sigma_{fi}^{эксп} - \sigma_{fi}^{cm} \qquad (4.81)$$

Дальнейшему анализу подвергается сечение σ_{fi}^{n+p}, в которое дают вклад прямой и резонансный механизмы. Соответствующие элементы S-матрицы параметризуются в следующем виде:

$$S_{l'j'J} = \exp\left[i(\delta_{lj} + \delta_{l'j'} + \omega_{lj} + \omega_{l'j'})\right]\left\{V_{l'j',lj}\exp\left[-(\eta_{lj} + \eta_{l'j'})\right] + \right.$$
$$\left. + i\frac{\exp\left[i(\varphi_{lj} + \varphi_{l'j'})\right](\Gamma_{Jl'j'})^{1/2}(\Gamma_{Jlj})^{1/2}}{E - E_J + i\frac{1}{2}\Gamma_J}\right\} \qquad (4.82)$$

$$\Gamma_J = \sum_{l''j''}\Gamma_{Jl''j''} \qquad (4.83)$$

Здесь $\delta_{lj}, \delta_{l'j'}$ и $\omega_{lj}, \omega_{l'j'}$ - ядерные и кулоновские, соответственно, фазы рассеяния; $V_{l'j',lj}$- матричные элементы, соответствующие прямому переходу (вычисляются в МСК или МИВ); $\eta_{lj}, \eta_{l'j'}$ - ядерные фазы, связанные с поглощением (W); E_J , Γ_J – энергия и полные ширины , соответственно, резонансных состояний; Γ_{ljJ} - парциальные ширины; φ_{lj}, $\varphi_{l'j'}$ - так называемые **резонансные фазы.**

При анализе экспериментальных данных величины $\delta_{lj}, \delta_{l'j'}, \omega_{lj}, \omega_{l'j'}, \eta_{lj}, \eta_{l'j'}$ вычисляются в рамках ОМ, причем оптические параметры являются подгоночными, $V_{l'j',lj}$- вычисляются на основе остаточного взаимодействия (см. формулы (4.43)-(4.45) или (4.50)) . Все остальные параметры в (4.82) являются подгоночными. В связи с большим количеством подгоночных параметров к эксперименту при низких энергиях предъявляется требование **полноты**. Чтобы иметь возможность при анализе экспериментальных данных получать более достоверную информацию, эксперимент должен быть достаточно полным и включать в себя получение данных по функциям возбуждения в упругом и неупругом рассеянии, измерение дифференциальных сечений неупругого и упругого рассеяния как в резонансной, так и в нерезонансной области энергий, а также получение данных по поляризационным явлениям (поляризация, спин-флип, ассиметрия).

6. В заключении параграфа обсудим возможность применения МСК к описанию рассеяния **составных частиц** на ядрах и рассеяния на нечетных ядрах, а также применение МИВ. Что касается составных частиц-снарядов, то представленный формализм полностью применим к описанию их рассеяния на ядрах. Специфика налетающей частицы учитывается при этом выбором потенциала среднего поля в (4.51),(4.45) и (4.50) и построением спин-угловой части в (4.55). Однако, процессы с перераспределением нуклонов, которые более существенны в реакциях с составными частицами, чем в реакциях с нуклонами, в МСК не рассматриваются.

В принципе, МСК применим к описанию рассеяния нуклонов на нечетных ядрах, но в этом случае число состояний ядра-мишени, которые одновременно нужно учитывать, значительно больше числа соответствующих состояний четно-четного ядра. Ранг системы связанных дифференциальных уравнений становится слишком большим. Однако, связь каналов в случае нечетного ядра –мишени меньше, чем в случае четно-четного ядра, поэтому можно ограничиться применением первого или второго борновского приближения с неискаженными волнами.

МИВ является численной реализацией борновского приближения с искаженными волнами, когда рассматривается по теории возмущений связь только двух каналов. Он может быть применим для описания неупругого рассеяния частиц на ядрах при выполнении целого ряда условий. Основными из них являются следующие: энергия налетающей частицы должна быть достаточно большой, чтобы в связь каналов не давали вклада одночастичные резонансы, и параметры статической или динамической деформации должны быть невелики ($\beta_\lambda \le 0.25$).