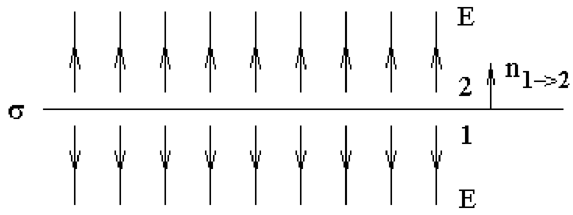
29. Условия на границе раздела двух сред.

Для электрического поля уравнения Максвелла $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases}$ для границы раздела двух сред превращаются в граничные условия $\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases}$, где $\vec{n} = \vec{n}_{1\to2}$, σ — поверхностная плотность свободных зарядов.

Граничные условия позволяют найти поле бесконечной плоскости в вакууме с поверхностной плотностью заряда σ.

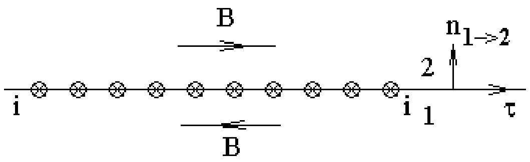
В вакууме $\vec{D} = \vec{E}$ => $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$

Из симметрии задачи следует, что $\left|E_{2n}\right| = \left|E_{1n}\right| = E$ => $E = 2\pi\sigma$



Для магнитного поля уравнения Максвелла $\begin{cases} div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$ для границы раздела двух сред превращаются в граничные условия $\begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c}i \end{cases}$, где i — плотность поверхностного тока проводимости, $\vec{\tau} = \left[\dfrac{\vec{i}}{i}, \vec{n}_{1\to2}\right]$ — единичный вектор, направленный по касательной к границе раздела и перпендикулярно поверхностным токам границы. Направление скачка поля H_τ образует правый винт с направлением поверхностного тока проводимости.

Граничные условия позволяют найти магнитное поле бесконечной плоскости в вакууме с плотностью поверхностного тока $\vec{i}$. Пусть токи текут от нас.



В вакууме $\vec{B} = \vec{H}$ => $B_{2\tau} - B_{1\tau} = \dfrac{4\pi}{c} i$

Из симметрии задачи следует, что $|B_{2\tau}| = |B_{1\tau}| = B$ => $B = \dfrac{2\pi}{c} i$

Граничные условия позволяют найти поле в полости вытянутой вдоль поля и в полости сплюснутой перпендикулярно полю.

Если на границе полости нет свободных поверхностных зарядов и поверхностных токов проводимости $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \vec{i} = 0 \end{cases}$, то граничные условия для электрического и магнитного полей выглядят одинаково:

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = 0 \\ E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0 \end{cases},$$

Поэтому дальнейшие рассуждения одинаковы для электрического и магнитного полей.

Рассмотрим полость в виде длинного цилиндра с осью цилиндра направленной вдоль поля.

Для цилиндрической полости, вытянутой вдоль поля, линии поля идут по касательной к боковой поверхности цилиндра полости и почти не искривляются.

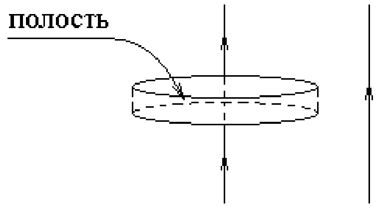
Граничные условия на боковой поверхности полости:

$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$ или $H_{2\tau} - H_{1\tau} = 0$. =>

Напряженность в полости, вытянутой вдоль поля, одинаковая в среде и в полости. Индукция поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем напряженность электрического или магнитного поля в веществе.

Для цилиндрической полости, сплюснутой перпендикулярно полю, линии поля направлены перпендикулярно донышкам полости и, проходя через донышки, почти не искривляются.



Граничные условия на донышках полости:

$D_{2n} - D_{1n} = 0$ или $B_{2n} - B_{1n} = 0$ =>

Индукция в полости, сплюснутой перпендикулярно полю, одинаковая в среде и в полости. Напряженность поля в среде и в полости различная.

Измеряя поле в такой полости, мы измеряем электрическую или магнитную индукцию в веществе.

24. Система уравнений Максвелла для напряженности электрического и индукции магнитного полей в вакууме.

Уравнения Максвелла справедливы для переменных электромагнитных полей.

$$\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

— система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Чтобы уравнения имело смысл решать относительно электрического и магнитного полей, нужно дополнить их так называемыми материальными связями:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}.$$

Кроме того, заряды и токи связаны уравнением непрерывности:

$$div\left(\vec{j}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Для решения задач обычно удобнее использовать уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = 4\pi Q \\ \oint\limits_l E_l\, dl = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) \\ \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0 \\ \oint\limits_l H_l\, dl = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) \end{cases}$$

Первое из уравнений Максвелла можно записать в виде $\Phi_D = 4\pi Q$. Для полей независящих от времени — это электростатическая теорема Гаусса. Для переменных полей теорема доказана быть не может, но предполагают, что равенство остается верным и для переменных полей. Все следствия из этого предположения согласуются с опытом.

Второе уравнение $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — интерпретация Максвелла закона электромагнитной индукции Фарадея $\mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt}$. Заметим, что уравнение содержит полную производную, а уравнение Максвелла в интегральной форме $\oint\limits_l E_l\, dl = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ содержит частную производную по времени. Дело в том, что изменение потока при перемещении или деформации контура дает вклад в ЭДС индукции $\mathcal{E}_{инд} \equiv \oint\limits_l \left(\vec{E}_{стор}, d\vec{l}\right)$ через силы Лоренца, которые рассматриваются, как сторонние силы с напряженностью сторонних сил $\vec{E}_{стор}$, но не дает вклад в циркуляцию поля $\vec{E}$: $\oint\limits_l \left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$.

Третье уравнение $\Phi_B = 0$ означает отсутствие магнитных зарядов.

Четвертое уравнение $rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ представляет собой теорему о циркуляции поля в магнитостатике дополненное токами смещения Максвелла $\vec{j}_{см} \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

В вакууме

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{B} \\ \vec{D} = \vec{E} \end{cases}$$

и уравнения Максвелла в вакууме примут следующий вид:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Если под вакуумом понимать область без зарядов и токов, то в вакууме:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{B}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}.$$

Система уравнений Максвелла $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho \\ rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$ — это 8 одномерных уравнений для 6-и одномерных неизвестных $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Система уравнений избыточна. В системе дифференциальных уравнений для нескольких функций одной переменной, как и для системы обычных алгебраических уравнений, нужно чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных. Произвол, который содержится в решении дифференциальных уравнений с одной переменной, — это несколько произвольных констант интегрирования, их число равно сумме порядков старших производных неизвестных функций.

Если же решаются дифференциальные уравнения в частных производных, то произвол решений гораздо больше. Для устранения произвола могут потребоваться дополнительные дифференциальные уравнения. Тем не менее, в случае электромагнитных полей система действительно избыточна.

Дело в том, что уравнения $\begin{cases} div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho \\ div\left(\vec{B}\right)=0 \end{cases}$ не нужны, так как являются следствием другой пары уравнений $\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$.

И действительно. Рассмотрим дивергенцию от уравнения $rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Дивергенция ротора любого поля равна нулю:

$div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)=\left(\vec{E},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{E},0\right)=0$, где использовано то, что циклическая перестановка векторов в смешанном скалярно-векторном произведении $\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right)$ не изменяет его величину. Тогда

$$0=div\left(rot\left(\vec{E}\right)\right)=div\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right) \qquad =>$$

$-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{B}\right)=0$ => $div\left(\vec{B}\right)=const$ — дивергенция поля $\vec{B}$ не изменяется со временем.

Если когда-то в рассматриваемой области не было магнитного поля $\vec{B}$, то и его дивергенция была равна нулю $div\left(\vec{B}\right)=0$, а затем дивергенция не могла измениться. Следовательно,

$$div\left(\vec{B}\right)=0.$$

Аналогично из уравнения $rot\left(\vec{H}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ можно получить, что

$$div\left(\vec{D}\right)=4\pi\rho.$$

Таким образом, в вакууме без зарядов и токов достаточно рассматривать только два уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right)=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{B}\right)=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

28. Объемная плотность и поток энергии электромагнитного поля.

По определению потенциал — это потенциальная энергия единичного заряда: $\varphi \equiv \dfrac{W}{q}$. Тогда энергия заряда q в точке с потенциалом φ равна $W = q\varphi$.

Энергия взаимодействия системы зарядов $W = \dfrac{1}{2}\sum\limits_i q_i\varphi_i$, где коэффициент $\dfrac{1}{2}$ связан с тем, что энергия взаимодействия каждой пары зарядов учитывается в этой сумме два раза, как энергия одного заряда из пары и как энергия второго заряда.

Для непрерывного распределения зарядов

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\,\rho\, dV .$$

Подставим сюда объемную плотность свободных зарядов ρ из выражения $div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$ и получим

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varphi\; div\left(\vec{D}\right) dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varphi\left(\vec{\nabla},\vec{D}\right) dV .$$

Проинтегрируем правую часть равенства по частям, перебросив производную с сомножителя $\vec{D}$ на сомножитель φ, и получим

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V=\infty}\left(\vec{\nabla}\varphi,\vec{D}\right) dV .$$

Подставим сюда $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ и получим

$$W = \int\limits_{V=\infty}\frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi} dV .$$

Отсюда следует, что подынтегральное выражение — это объемная плотность энергии:

$$w = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi} .$$

Аналогичное выражение можно получить для магнитного поля:

$$w = \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi} .$$

В результате объемная плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{\left(\vec{D},\vec{E}\right)}{8\pi} + \frac{\left(\vec{B},\vec{H}\right)}{8\pi} .$$

Рассмотрим дифференциал объемной плотности энергии. Дифференциал от каждого из двух слагаемых нужно брать, как дифференциал от произведения.

В случае линейной среды, когда индукция пропорциональна напряженности, оба слагаемых в дифференциале произведения равны друг другу. В таком случае вместо двух слагаемых можно оставить одно удвоенное. Если оставить слагаемые, в которых под дифференциалом находятся индукции полей, то получим

$$dw = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, d\vec{D}\right) + \left(\vec{H}, d\vec{B}\right)\right\}.$$

Это равенство справедливо в более общем случае, чем предыдущее равенство, так как оно справедливо и при нелинейной и при гистерезисной зависимости индукции поля от напряженности.

Разделим это равенство на дифференциал времени и получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right\}.$$

Сюда вместо производных $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ подставим их выражения из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot\left(\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$ и получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\vec{E}, \vec{j}\right) + \frac{c}{4\pi}\cdot\left\{\left(\vec{E}, \left[\vec{\nabla}, \vec{H}\right]\right) - \left(\vec{H}, \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right]\right)\right\}$$

Здесь в каждом слагаемом с вектором набла $\vec{\nabla}$ делаем циклическую перестановку векторов в смешанном скалярно-векторном произведении так, чтобы вектор $\vec{\nabla}$ оказался на первом месте. А затем объединим два слагаемых, как производную от произведения и получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\left(\vec{E}, \vec{j}\right) - \frac{c}{4\pi}\cdot\left(\vec{\nabla}, \left[\vec{E}, \vec{H}\right]\right).$$

Введем обозначение:

$\vec{S} \equiv \frac{c}{4\pi}\cdot\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга. Тогда

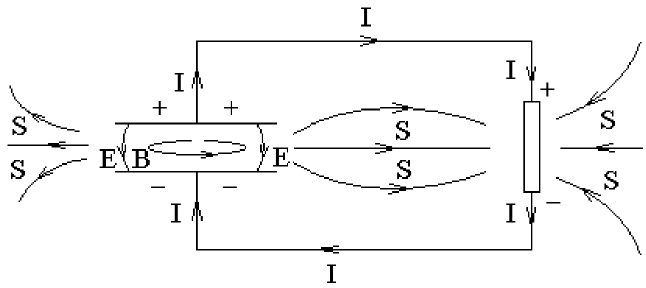
$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \vec{j}\right) + div\left(\vec{S}\right)$$

Это равенство можно интерпретировать, как закон сохранения энергии. Уменьшение энергии электромагнитного поля $-\frac{\partial w}{\partial t}$ идет на нагрев среды $\left(\vec{E}, \vec{j}\right)$

(Ленц-Джоулево тепло) и вытекает из рассматриваемого объема через его границу $div\left(\vec{S}\right)$.

Тогда, вектор Пойнтинга $\vec{S}$ — это плотность потока энергии электромагнитного поля или энергия, которая в единицу времени протекает через единицу площади.

В качестве примера движения энергии электромагнитного поля рассмотрим разряд конденсатора через резистор.



26. Выражения для напряженности электрического и индукции магнитного полей через скалярный и векторный потенциалы. Калибровочная инвариантность.

Потенциалы переменных электромагнитных полей.

$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$

Для постоянных магнитных полей это равенство доказывается, а для переменных — это определение векторного потенциала $\vec{A}$.

Рассмотрим одно из уравнений системы Максвелла:

$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\left(\vec{A}\right) = -rot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \quad =>$$

$$rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad => \quad \text{существует } \varphi \text{ такое, что}$$

$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi$ — это определение скалярного потенциала φ для переменных электромагнитных полей. Это определение потенциала не имеет смысла энергии единичного заряда.

Итак, определение потенциалов переменного электромагнитного поля имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$$

Заметим, что это определение превращается в обычное определение потенциалов электростатики и магнитостатики в случае постоянных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

<u>Калибровки потенциалов.</u>

В определении $\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$ определены только некоторые производные от потенциалов, при этом в определении самих потенциалов остался некоторый произвол.

Разные варианты устранения произвола — это и есть разные калибровки потенциалов.

Если $\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, то из первого уравнения определений потенциалов скалярный потенциал единственным образом находится через векторный потенциал и поле $\vec{E}$.

Из $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ следует $\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty}\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, d\vec{l}\right)$ аналогично тому, как в электростатике из $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$ следует $\varphi\left(\vec{r}\right) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty}\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$.

Следовательно, если векторный потенциал $\vec{A}$ определен однозначно, то и скалярный потенциал φ находится без произвола.

Таким образом, весь произвол в определении потенциалов — это произвол в определении $\vec{A}$ равенством $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$.

Рассмотрим два разных векторных потенциала $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, соответствующих одному и тому же полю $\vec{B}$:

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}_1\right) = rot\left(\vec{A}_2\right)$$

Обозначим $\vec{Y} \equiv \vec{A}_2 - \vec{A}_1$. Тогда

$rot\left(\vec{Y}\right) = rot\left(\vec{A}_2\right) - rot\left(\vec{A}_1\right) = 0$. Если ротор поля равен нулю, то всегда существует скалярное поле X такое, что

$$\vec{Y} = -\vec{\nabla}X \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}_2 - \vec{A}_1 = -\vec{\nabla}X \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla}X$$

И, наоборот, для любого поля X, если $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} X$, и $\vec{A}_1$ — векторный потенциал (в том смысле, что $\vec{B} = rot\left(\vec{A}_1\right)$), то $\vec{A}_2$ — тоже векторный потенциал для того же поля $\vec{B}$ (то есть $\vec{B} = rot\left(\vec{A}_2\right)$). И действительно

$$rot\left(\vec{A}_2\right) = rot\left(\vec{A}_1 - \vec{\nabla} X\right) = rot\left(\vec{A}_1\right) - \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla} X\right] = rot\left(\vec{A}_1\right) - \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right] X = rot\left(\vec{A}_1\right) = \vec{B}$$

Следовательно, произвол в определении $\vec{A}$ такой и только такой, что $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} X$, где X — любая функция координат и времени.

Рассмотри теперь, каков при этом оказывается произвол в величине $div\left(\vec{A}\right)$.

$$div\left(\vec{A}_2\right) = div\left(\vec{A}_1 - \vec{\nabla} X\right) = div\left(\vec{A}_1\right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} X\right) = div\left(\vec{A}_1\right) - \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right) X = div\left(\vec{A}_1\right) - \Delta X$$

Докажем, что ΔX можно сделать равным любой наперед заданной функции координат и времени. И действительно, уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ имеет решение относительно φ для любой функции ρ. То есть $\Delta\varphi$ можно сделать равным любой функции $-4\pi\rho$.

И так произвол в определении $\vec{A}$ таков, что $div\left(\vec{A}\right)$ можно изменить на любую величину ΔX. Следовательно, $div\left(\vec{A}\right)$ можно сделать равной любой наперед заданной функции. Произвол в определении $\vec{A}$ такой. А вот только ли такой? Казалось бы, произвол только такой. При заданной исходной функции $div\left(\vec{A}_1\right)$ и заданной конечной функции $div\left(\vec{A}_2\right)$ однозначно задан лапласиан $\Delta X = div\left(\vec{A}_1\right) - div\left(\vec{A}_2\right)$. А при заданной величине ΔX однозначно находится X, если потребовать, чтобы правая часть равенства достаточно быстро убывала на бесконечности и $X \xrightarrow[\vec{r}\to\infty]{} 0$. Следовательно, однозначно задано изменение векторного потенциала $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{\nabla} X$. Вот только правая часть уравнения $\Delta X = div\left(\vec{A}_1\right) - div\left(\vec{A}_2\right)$ не обязана стремиться к нулю на бесконечности. В частности, как мне подсказал мой студент Чубыкин Алексей Дмитриевич, можно рассмотреть волны скалярной функции Ψ, распространяющиеся со скоростью света, так что $\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$. Если задать потенциалы через эту функцию Ψ следующим образом $\vec{A} = -\vec{\nabla}\Psi$ и $\varphi = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, то потенциалы будут удовлетворять калибровке Лоренца в вакууме $div\left(\vec{A}\right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, а электрическое и магнитное поле $\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$ окажутся равными нулю, если их выразить через Ψ. То есть поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (например, нулевые) при заданной величине дивергенции векторного потенциала, например, в калибровке Лоренца $div\left(\vec{A}\right) = -\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ не задают однозначно (нулевых) величин потенциалов $\vec{A}$ и φ, и в потенциалах остается некоторый произвол.

В различных калибровках потенциалов выбирают различные выражения для $div\left(\vec{A}\right)$.

1). Калибровка Кулона.

$div\left(\vec{A}\right) = 0$

2). Калибровка $\varphi = 0$.

С одной стороны:

$$\varphi = 0 \quad => \quad \vec{\nabla}\varphi = 0 \quad => \quad \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0 \quad =>$$

$$div\left(\vec{E}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial div\left(\vec{A}\right)}{\partial t} = 0 \quad => \quad div\left(\vec{A}\right) = -c\int_{-\infty}^{t} div\left(\vec{E}\right)dt.$$

С другой стороны:

$$div\left(\vec{A}\right) = -c\int_{-\infty}^{t} div\left(\vec{E}\right)dt \quad => \quad div\left(\vec{E}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial div\left(\vec{A}\right)}{\partial t} = 0 \quad =>$$

$div\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$, то есть поле $\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ниоткуда не вытекает.

С другой стороны $rot\left(\vec{E}\right) + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ и $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$, тогда $rot\left(\vec{E}\right) + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)}{\partial t} = 0$:

$rot\left(\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$, то есть поле $\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ не закручено вокруг какого-нибудь векторного поля.

Такого поля быть не может. Любое векторное поле либо имеет источники, либо закручено вокруг другого поля. Следовательно, $\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$.

Тогда $\vec{\nabla}\varphi=-\vec{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$ => $\varphi=0$.

3). Калибровка Лоренца.

$$div\left(\vec{A}\right)=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Обычно рассматривают калибровку Лоренца в вакууме, тогда

$$div\left(\vec{A}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Запишем калибровку Лоренца в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(ct)}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0.$$

Это равенство можно рассматривать, как свертку ковариантной производной $\partial_\alpha=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial(ct)} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ неизвестно с чем: $A^\alpha=\begin{pmatrix}\varphi\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}$. Свертка равна нулю, то есть является скаляром по группе Лоренца. Следовательно, неизвестно что в виде $A^\alpha=\begin{pmatrix}\varphi\\ A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}$ является контравариантным вектором.

Тогда калибровку Лоренца можно записать в ковариантной форме:

$$\partial_\alpha A^\alpha=0.$$