27. Ковариантная формулировка уравнений Максвелла и динамические уравнения для потенциалов.

Динамические (дифференциальные) уравнения для потенциалов электромагнитного поля.

Подставим определение потенциалов

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) \end{cases}$$

в уравнения Максвелла вместо полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и получим дифференциальные уравнения для потенциалов.

1). $rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

При подстановке определения потенциалов в это уравнение оно превращается в тождество, так как из этого уравнения было получено определение потенциала φ.

2). $div\left(\vec{B}\right) = 0$

При подстановке определения потенциала $\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right)$ второе уравнение так же превращается в тождество, так как дивергенция ротора любого поля равна нулю. И действительно:

$$div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right) = \left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right) = \left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right) = \left(\vec{A},0\right) = 0.$$

3). $div\left(\vec{D}\right) = 4\pi\rho$

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной изотропной среде $\begin{cases} \varepsilon = const \\ \mu = const \end{cases}$. Вакуум $\begin{cases} \varepsilon = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$ будет частным случаем этого рассмотрения.

$$4\pi\rho = div\left(\vec{D}\right) = div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \varepsilon\cdot div\left(\vec{E}\right) = \varepsilon\cdot div\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\varepsilon\cdot\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right) - \frac{\varepsilon}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}div\left(\vec{A}\right)$$

Здесь $\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi\right) = \Delta\varphi$ =>

$\Delta\varphi + \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(div\left(\vec{A}\right)\right)}{\partial t} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$ — одно из дифференциальных уравнений для потенциалов $\left(\varphi,\vec{A}\right)$.

4). $rot\left(\vec{H}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Умножим уравнение на μ и получим

$rot\left(\vec{B}\right)=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, подставим сюда определение потенциалов и получим

$$rot\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}-\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot\frac{\partial\vec{\nabla}\varphi}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

С другой стороны

$$rot\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right)-\vec{A}\left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)=grad\left(div\left(\vec{A}\right)\right)-\Delta\vec{A}$$

Здесь двойное векторное произведение преобразовано по правилу "бац минус цап".

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим

$$\Delta\vec{A}-grad\left(div\left(\vec{A}\right)\right)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

Это второе дифференциальное уравнение для потенциалов $\left(\varphi,\vec{A}\right)$. Векторное уравнение — это три уравнения для проекций. Вместе с первым уравнением получаем 4-е дифференциальные уравнения для 4-х неизвестных $\left(\varphi,\vec{A}\right)$. Обычно систему дифференциальных уравнений, как и систему простых алгебраических уравнений, имеет смысл решать в том случае, если число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Дифференциальные уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца

$$div\left(\vec{A}\right)=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

принимают вид:

$$\begin{cases}\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho\\ \Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}\end{cases}$$

Ковариантность и контравариантность.

Слово "ковариантный" означает "преобразуется так же, как что-то", а слово "контравариантный" означает "преобразуется иначе".

Обсудим подробнее. Так же, как что?

В теории относительности при переходе от одной системы отсчета к другой время и три пространственных координаты события (вместе это 4 координаты события) изменяются согласно преобразованиям Лоренца. Новые координаты линейно зависят от старых. В таком случае, столбец новых координат может быть получен, как произведение некоторой матрицы на столбец старых координат.

Любая четверка величин, которая преобразуется с помощью матрицы преобразования координат, называется контравариантным 4-х вектором.

Термин "вектор" в данном случае взят по аналогии с трехмерными векторами. Координаты трехмерного вектора при повороте системы координат изменяются с помощью некоторой матрицы аналогично координатам 4-х вектора в случае преобразований Лоренца.

В трехмерном пространстве при повороте системы координат кроме самих координат изменяются и базисные векторы $\vec{e}_i$. Новые базисные векторы являются линейными комбинациями старых базисных векторов. Базисные векторы можно записать в столбец $\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$ (хотя лучше бы в строку, но об этом чуть позднее) аналогично координатам вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда, столбец новых базисных векторов может быть получен, как произведение некоторой матрицы на столбец старых базисных векторов.

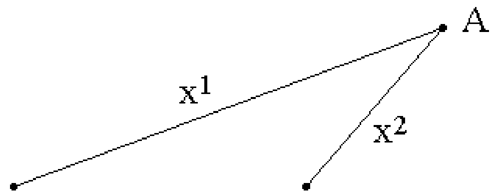
Ковариантные величины — это величины, которые преобразуются так же, как базисные векторы, контравариантные величины — величины, которые преобразуются так же, как координаты вектора.

Ковариантные и контравариантные величины можно рассматривать в пространстве любой размерности, а не только в трехмерном пространстве.

Криволинейная система координат.

В теории относительности пространство-время искривлено гравитацией. Чтобы научиться рассматривать искривленное пространство удобно для начала рассмотреть пространство, которое не искривлено, но рассмотреть его в криволинейных координатах. Искривленное пространство описывается точно так же, как не искривленное описывается в криволинейных координатах. Пример двумерного искривленного пространства — поверхность сферы.

Рассмотрим пример криволинейных координат в неискривленном двумерном пространстве — на плоскости. Для этого выберем на плоскости две точки — полюсы, и в качестве двух координат x^1 и x^2 произвольной точки A на плоскости будем рассматривать два расстояния от полюсов до этой произвольной точки A.



Координаты — это контравариантные величины. У контравариантных величин индекс принято писать наверху.

Мы хотим ввести базисные векторы. Окажется, что их направление будет изменяться при изменении положения точки A. То есть, базисные векторы для точки A можно будет использовать только в малой окрестности точки A.

Мы введем в малой окрестности точки A базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ для описания вектора малого перемещения из точки A. Базисные векторы — это ковариантные величины. У ковариантных величин индекс принято писать внизу.

Казалось бы, базисные векторы надо направить вдоль продолжения отрезков, которые из полюсов идут к точке A, но это не так.

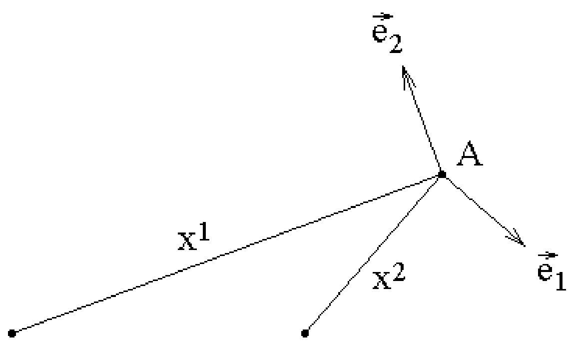
Не так, потому что хотелось бы выполнения следующей формулы

$$\Delta\vec{A} = \Delta x^1 \vec{e}_1 + \Delta x^2 \vec{e}_2,$$

чтобы изменения координат точки при малом векторе перемещения $\Delta\vec{A}$ из точки A оказались коэффициентами разложения по базисным векторам, построенным для точки A.

Рассмотрим такое перемещение из точки A, при котором не изменяется координата x^2. Тогда $\Delta x^2 = 0$ и, следовательно, $\Delta\vec{A} = \Delta x^1 \vec{e}_1$. В этом случае векторы $\Delta\vec{A}$ и $\vec{e}_1$ параллельны: $\Delta\vec{A} \parallel \vec{e}_1$. Тогда вектор $\vec{e}_1$ имеет такое направление, в котором не изменяется координата x^2. Аналогично вектор $\vec{e}_2$ имеет такое направление, в котором не изменяется координата x^1.

Базисные векторы, обладающие этим свойством, изображены на следующем рисунке



В малой окрестности точки A мы получили так называемую косоугольную систему координат — систему координат, в которой базисные векторы не ортогональны друг другу.

В общем случае многомерного пространства базисный вектор $\vec{e}_i$ имеет такое направление, в котором все остальные координаты, кроме i-ой координаты, не изменяются, а изменение i-ой координаты положительно.

Рассмотрим теперь повороты системы координат.

Весь рисунок (систему координат вместе с двумя полюсами) нужно поворачивать вокруг точки A. Базисные векторы повернутся вместе с системой координат, а вектор $\Delta\vec{A}$ при повороте системы координат нужно оставить неизменным без поворота.

При таком повороте координаты Δx^i вектора $\Delta\vec{A}$ преобразуются с помощью некоторой матрицы *M:*

$$\Delta x'^i = \sum_k M_k^i \Delta x^k .$$

Здесь штрихом обозначены новые координаты после поворота.

Индекс, по которому производится суммирование, принято один раз писать внизу и один раз — наверху. В такой записи окажется, что все величины (в том числе и матрица) ковариантны по нижним индексам и контравариантны по верхним индексам.

Для краткости знак суммы не пишут, подразумевая, что суммирование производится каждый раз, как только формула содержит повторяющийся индекс один раз внизу и один раз наверху. Тогда, опуская символ суммирования, получим

$$\Delta x'^i = M_k^i \Delta x^k .$$

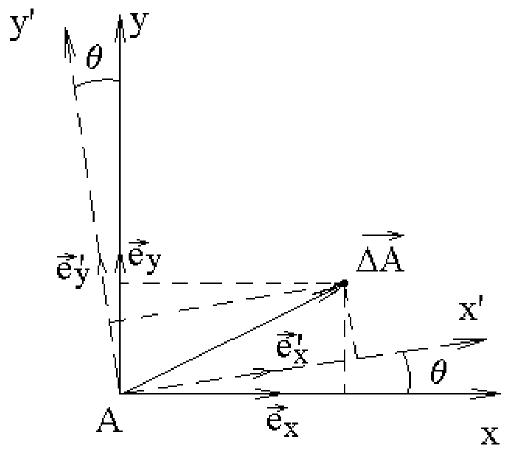
Если координаты вектора записать в виде столбца и перемножить матрицы по правилу "строка на столбец", то нижний индекс матрицы M_k^i — это номер столбца, в верхний индекс — номер строки. Заметим, что у столбца координат верхний индекс — тоже номер строки.

Можно доказать, что базисные векторы преобразуются с помощью обратной матрицы M^{-1}, которую называют матрицей поворота:

$$\vec{e}_i^{\,'} = \left(M^{-1}\right)_i^k \vec{e}_k .$$

Здесь суммирование идет по верхнему, а не по нижнему индексу матрицы. Поэтому, если написать базисные векторы в столбец и умножать матрицы по правилу "строка на столбец", то базисные векторы преобразуются с помощью обратной транспонированной матрицы по отношению к матрице преобразования координат.

Для прямоугольной системы координат обратная транспонированная матрица по отношению к матрице поворота совпадает с самой матрицей поворота. В таком случае, ковариантные и контравариантные величины преобразуются одинаково, и нет смысла их различать, что видно из следующего рисунка



$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \cdot \cos(\theta) + \Delta y \cdot \sin(\theta) \\ \Delta y' = -\Delta x \cdot \sin(\theta) + \Delta y \cdot \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \vec{e}_x^{\,'} = \vec{e}_x \cdot \cos(\theta) + \vec{e}_y \cdot \sin(\theta) \\ \vec{e}_y^{\,'} = -\vec{e}_x \cdot \sin(\theta) + \vec{e}_y \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_x^{\,'} \\ \vec{e}_y^{\,'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

В косоугольной системе координат ковариантные и контравариантные величины преобразуются по-разному. Базисные векторы имеют нижний индекс, который соответствует номеру столбца при умножении по правилу "строка на столбец", поэтому базисные векторы удобнее писать строку, а не в столбец.

Если базисные векторы написать в строку, то они преобразуются с помощью обратной матрицы по отношению к матрице преобразования координат, а не с помощью обратной транспонированной матрицы.

$$\begin{pmatrix} \Delta x'^1 \\ \Delta x'^2 \\ \Delta x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 & M_3^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & M_3^2 \\ M_1^3 & M_2^3 & M_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}\,'_1 & \vec{e}\,'_2 & \vec{e}\,'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(M^{-1}\right)_1^1 & \left(M^{-1}\right)_2^1 & \left(M^{-1}\right)_3^1\\ \left(M^{-1}\right)_1^2 & \left(M^{-1}\right)_2^2 & \left(M^{-1}\right)_3^2\\ \left(M^{-1}\right)_1^3 & \left(M^{-1}\right)_2^3 & \left(M^{-1}\right)_3^3\end{pmatrix}$$

Ковариантные координаты вектора.

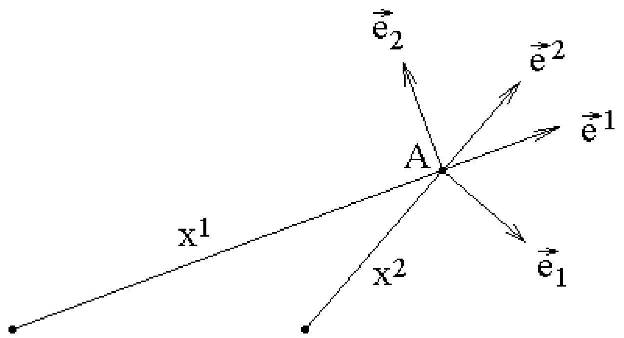
Обычные координаты Δx^i называются контравариантными координатами вектора $\Delta\vec{A}$.

Кроме контравариантных координат вектора можно ввести в рассмотрение и ковариантные координаты — это коэффициенты Δx_i разложения вектора $\Delta\vec{A}$ в так называемом сопряженном базисе $\vec{e}^{\,i}$:

$\Delta\vec{A}=\Delta x_i\,\vec{e}^{\,i}$.

Прежде чем ввести в рассмотрение ковариантные координаты, нужно ввести в рассмотрение сопряженный базис.

Векторы сопряженного базиса контравариантны. Вектор $\vec{e}^{\,i}$ сопряженного базиса по определению имеет такое направление, в котором быстрее всего возрастает координата x^i. На следующем рисунке приведены и векторы обычного базиса $\vec{e}_i$, и векторы сопряженного базиса $\vec{e}^{\,i}$.



Можно доказать, что $\vec{e}^{\,k}\perp\vec{e}_i$ при любом $i\neq k$, так как поверхность постоянного значения координаты всегда перпендикулярна направлению, в котором координата быстрее всего изменяется.

Векторы сопряженного базиса в отличие от векторов обычного базиса имеют не единичную длину. Длина векторов сопряженного базиса определяется соотношением $\left(\vec{e}^{\,i},\vec{e}_i\right)=1$ для каждого значения индекса *i* (здесь нет суммирования по индексу *i*).

А вот теперь, после введения сопряженного базиса $\vec{e}^{\,i}$, ковариантные координаты Δx_i вектора $\Delta\vec{A}$ определяются выражением

$$\Delta\vec{A} = \Delta x_i\,\vec{e}^{\,i}.$$

Коэффициенты разложения сопряженного базиса по обычному базису образуют матрицу так называемого метрического тензора g^{ik}:

$$\vec{e}^{\,i} = g^{ik}\vec{e}_k.$$

Любые контравариантные величины преобразуются при поворотах системы координат также как векторы сопряженного базиса. Метрический тензор позволяет преобразовать любую ковариантную величину в контравариантную величину. Другими словами метрический тензор служит для подъема индексов. В частности контравариантные координаты вектора $\Delta\vec{A}$ связаны с его ковариантными координатами соотношениями

$$\Delta x^i = g^{ik}\Delta x_k.$$

Матрицу опускания индексов g_{ik} тоже называют метрическим тензором:

$$\vec{e}_i = g_{ik}\vec{e}^{\,k} \text{ и } \Delta x_i = g_{ik}\Delta x^k.$$

Индексы матриц g_{ik} и g^{ik} поднимаются и опускаются с помощью тех же матриц g^{ik} и g_{ik}. Матрицы g^{ik}, g_{ik}, $g^i{}_k$ — симметричные матрицы, поэтому неважно, какой индекс пишется первым, а какой — вторым.

Подъем индексов метрического тензора: $g^i{}_k = g^{ij}g_{jk}$ и $g^{ik} = g^{ij}g_j{}^k$.

Опускание индексов метрического тензора: $g_i{}^k = g_{ij}g^{jk}$ и $g_{ik} = g_{ij}g^j{}_k$.

В прямоугольной системе координат векторы сопряженного базиса совпадают с векторами обычного базиса, а ковариантные координаты совпадают с контравариантными координатами. Различие проявляется только в косоугольной системе координат. Метрический тензор в прямоугольной системе координат является единичной матрицей.

Тензор. Свертка тензора.

Теперь объясним, что такое тензор.

Скаляр — это тензор нулевого ранга. Вектор — это тензор первого ранга.

Для понимания тензоров более высокого ранга введем понятие прямого произведения двух тензоров первого ранга. Пусть a^i и b^k — контравариантные тензоры первого ранга. Тогда будем говорить, что $c^{ik} \equiv a^i b^k$ — тензор второго ранга контравариантный по каждому индексу. Тензор второго ранга можно записать в виде матрицы. Только второй индекс нужно опустить с помощью метрического тензора, чтобы матрица была ковариантной по второму индексу, как это было у нас с матрицей M_k^i и матрицей $\left(M^{-1}\right)_i^k$. Контравариантный по обоим индексам тензор $c^{ik} \equiv a^i b^k$ все равно удобно записывать в виде матрицы, поэтому в матричном написании не всегда подразумевается, что один индекс контравариантный, а другой — ковариантный.

В трехмерном пространстве тензор второго ранга имеет 9 компонент.

Аналогично $c_{ik} \equiv a_i b_k$ — тензор второго ранга ковариантный по каждому индексу; $c^i{}_k \equiv a^i b_k$ — тензор второго ранга контравариантный по первому индексу и ковариантный по второму индексу.

Любая величина с двумя индексами, которая преобразуется при повороте системы координат так же, как прямое произведение двух тензоров первого ранга, является тензором второго ранга.

Прямое произведение тензора второго ранга на тензор первого ранга является тензором третьего ранга и так далее.

Любой индекс тензора можно поднять или опустить с помощью метрического тензора, который сам является тензором второго ранга. Можно доказать, что $g^i{}_k$ — единичная матрица с единицами на главной диагонали и нулями вне главной диагонали для любых криволинейных координат любого кривого пространства.

Суммирование тензора по дважды повторяющемуся индексу, который один раз встречается как верхний индекс и один раз — как нижний индекс, называется сверткой тензора. В результате свертки тензора всегда получается тензор, у которого остается на два индекса меньше (ранг тензора понижается на две единицы).

Свертка тензора второго ранга — это сумма диагональных элементов матрицы. Свертка прямого произведения двух векторов — это их скалярное произведение. Величину $g_{ik}\Delta x^k$ можно рассматривать, как свертку тензора третьего ранга $g_{ik}\Delta x^j$. В результате этой свертки получается тензор первого ранга $\Delta x_i = g_{ik}\Delta x^k$.

В тензорной алгебре доказано, что если свертка прямого произведения тензора неизвестно с чем — тензор, то это неизвестно что — тоже тензор. Подразумевается, что прямое произведение сворачивают по индексам, хотя бы один из которых не принадлежит неизвестно чему.

Ковариантные и контравариантные координаты теории относительности. Метрический тензор неискривленного пространства-времени.

Скаляр по группе поворотов — это величина, которая не изменяется при повороте системы координат, например длина вектора. Скаляр по группе Лоренца — это величина, которая не изменяется при преобразованиях Лоренца, например квадрат интервала между двумя событиями.

Тензор первого ранга — это вектор. В случае преобразований Лоренца — это 4-х вектор, например 4-х вектор координат и времени события:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv x^{\alpha}.$$

Здесь индекс α принимает значения 0, 1, 2, 3: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Обычно греческими символами изображают индексы тензоров относительно преобразований Лоренца, а латинскими символами — индексы тензоров относительно поворотов системы координат.

Можно ли сказать, что любая штучка с одним индексом — это тензор первого ранга? Нет, так сказать нельзя. Чтобы штучка с индексом была тензором первого ранга относительно преобразований Лоренца необходимо и достаточно, чтобы компоненты этой штучки с разными значениями индекса преобразовывались при переходе в движущуюся систему отсчета так же (с помощью той же матрицы), как преобразуются время и пространственные координаты (x^{α}). Например, энергия и импульс частицы

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \equiv p^{\alpha}$$

преобразуются так же, как время и пространственные координаты (x^{α}) и, следовательно, p^{α} — тоже контравариантный тензор первого ранга.

Рассмотрим пространство-время не искривленные гравитацией. Квадрат интервала между двумя событиями $\Delta S^2 \equiv (c \cdot \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ можно рассматривать, как свертку прямого произведения штучки $\begin{pmatrix} c \cdot \Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}$ и контравариантного тензора первого ранга

$\begin{pmatrix} c\cdot\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \Delta x^{\alpha}$. Здесь горизонтальная запись штучки $\begin{pmatrix} c\cdot\Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}$ является намеком на матричное произведение строки на столбец, что и является сверткой прямого произведения.

Свертка ΔS^2 является скаляром по группе Лоренца. Следовательно, штучка $\begin{pmatrix} c\cdot\Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}$ является ковариантным тензором первого ранга. Поскольку ковариантный тензор сформирован из тех же компонент, что и контравариантный тензор Δx^{α} только с другими знаками, то естественно предположить, что это тот же тензор только с нижним индексом:

$$\Delta x_{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} c\cdot\Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}.$$

Тогда $\Delta S^2 = \Delta x_{\alpha}\Delta x^{\alpha}$.

Из компонент контравариантного тензора первого ранга, например тензора Δx^{α}, можно с помощью линейного преобразования получить компоненты ковариантного тензора первого ранга, в нашем случае компоненты тензора Δx_{α}. Это линейное преобразование можно представить, как произведение матрицы на вектор.

Сравним $\Delta x_{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} c\cdot\Delta t & -\Delta x & -\Delta y & -\Delta z \end{pmatrix}$ и выражение $\Delta x^{\alpha} = \begin{pmatrix} c\cdot\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$. Будем искать матрицу $g_{\alpha\beta}$ такую что $\Delta x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\Delta x^{\beta}$.

Эта матрица $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\alpha\beta}$ представляет собой метрический тензор относительно группы преобразований Лоренца в пространстве, неискривленном гравитацией.

Если пространство-время искривлено гравитацией, то тензоры $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ не совпадают друг с другом и с приведенной выше матрицей. В общем случае пространства, искривленного гравитацией, метрический тензор — это симметричный тензор $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}$ и $g^{\beta\alpha} = g^{\alpha\beta}$. Индексы метрического тензора можно поднимать и опускать с помощью метрического тензора. Причем метрический тензор контравариантный по одному индексу и ковариантный по другому индексу является единичным тензором второго ранга при любой гравитации:

$$g_{\alpha}{}^{\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=g^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Обсудим, как можно найти компоненты метрического тензора в пространстве-времени, искривленном гравитацией.

Рассмотрим равенство $\frac{\partial(ct)}{\partial(ct)}+\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=4$, которое справедливо и в том случае, если пространство-время искривлено гравитацией. Здесь каждое слагаемое равно единице. Правая часть равенства является скаляром по группе Лоренца. Левую часть равенства можно рассматривать как свертку прямого произведения штучки с одним индексом $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial(ct)} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ и контравариантного тензора первого ранга $\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix}=x^{\alpha}$. Свертка — скаляр, следовательно, штучка — ковариантный тензор первого ранга, который можно обозначить следующим образом:

$$\partial_{\alpha}\equiv\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial(ct)} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

Соответственно, обсуждаемое равенство примет вид $\partial_{\alpha}x^{\alpha}=4$.

Величину ∂_{α} называют ковариантной производной, она является ковариантным тензором первого ранга не только для неискривленного пространства-времени, но и в том случае, если пространство-время искривлено гравитацией.

Любая штучка с одним индексом, которая в пространстве-времени, искривленном гравитацией, преобразуется при переходе в движущуюся систему отсчета так же, как ∂_{α}, является ковариантным тензором первого ранга.

Ковариантные уравнения теории относительности.

Законы физики в векторном (или тензорном виде) очень удобны. Например, второй закон Ньютона в векторном виде $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ удобен тем, что как только он доказан на опыте в одной системе отсчета, так сразу он оказывается верен в любой другой системе отсчета повернутой произвольным образом относительно первой системы отсчета.

Аналогично в теории относительности при рассмотрении одних и тех же явлений наблюдателями, которые движутся друг относительно друга, удобно записывать физические законы в векторном (или тензорном виде) относительно преобразований Лоренца. Этот тензорный вид и называют ковариантной формой уравнений.

Ковариантная формулировка уравнений Максвелла.

В ковариантной формулировке уравнения Максвелла записываются через тензор электромагнитного поля:

$F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, где $\partial_\alpha \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(ct)} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ — ковариантная производная, A_α — ковариантные координаты 4-х вектора потенциала $A^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$.

Ковариантные координаты $A_\alpha = g_{\alpha\beta}A^\beta$ 4-х вектора потенциала A^α в пространстве времени не искривленном гравитацией, когда метрический тензор равен $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, имеют следующий вид:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \varphi & -A_x & -A_y & -A_z \end{pmatrix}.$$

Тензор электромагнитного поля выражается через производные от потенциалов. Производные сгруппированы таким образом, что компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ выражаются через проекции напряженности электрического и индукции магнитного полей.

Найдем компоненты тензора электромагнитного поля.

Диагональные компоненты тензора равны нулю, так как выражение $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ тождественно обращается в ноль при $\alpha = \beta$.

Рассмотрим теперь, например, компоненту F_{01}:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial}{\partial(ct)}\left(-A^1\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(A^0\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-A_x\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Здесь A_x, A_y, A_z — обычные проекции векторного потенциала на декартовые оси координат.

Сравним правую часть полученной цепочки равенств с выражением x-проекции напряженности электрического поля через потенциалы:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad => \qquad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}$$

В результате получаем: $F_{01} = E_x$. Аналогично получается $F_{02} = E_y$ и $F_{03} = E_z$.

Рассмотрим теперь компоненту F_{12}:

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \partial_1\left(-A^2\right) - \partial_2\left(-A^1\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-A_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-A_x\right) = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

Сравним правую часть равенства с проекцией магнитного поля B_z:

$$\vec{B} = rot\left(\vec{A}\right) = \left[\vec{\nabla}, \vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Откуда $B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}$. Сравнивая это выражение с компонентой F_{12}, получаем: $F_{12} = -B_z$. Аналогично можно получить, что $F_{13} = +B_y$ и $F_{23} = -B_x$.

С учетом того, что $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ — антисимметричный тензор, то есть $F_{\beta\alpha} = -F_{\alpha\beta}$, теперь можно выписать все компоненты этого тензора. Компоненты удобно изобразить в виде матрицы, в которой первый индекс — это номер строки, а второй — номер столбца матрицы. Тогда получим:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что уравнения системы уравнений Максвелла можно записать в ковариантной форме через ковариантные производные компонент тензора $F_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим пару однородных уравнений (в которых нет источников поля):

$$\begin{cases} rot\left(\vec{E}\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\left(\vec{B}\right) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Так

$$div\left(\vec{B}\right) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \partial_1 F_{32} + \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21}$$

Тогда

$$\partial_1 F_{32} + \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21} = 0$$

Для другого уравнения:

$$0 = rot\left(\vec{E}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Рассмотрим x-проекцию этого равенства:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial (ct)} = 0 \qquad =>$$

$$\partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32} = 0$$

Аналогично для y и z проекций получаем:

$$\partial_3 F_{01} + \partial_1 F_{30} + \partial_0 F_{13} = 0$$

и

$$\partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} = 0$$

Все четыре равенства можно объединить одним уравнением

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \qquad (2),$$

в котором индексы α, β, γ любые неравные друг другу. Если же хотя бы два индекса из трех равны друг другу, то левая часть уравнения (2) тождественно обращается в ноль и уравнение становится неинформативным.

В результате получаем, что уравнения (1) и (2) оказываются эквивалентны друг другу. Уравнение (2) — это ковариантная форма записи уравнений (1).

Уравнение (2) можно записать еще в одном ковариантном виде:

$e^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_\beta F_{\gamma\lambda}=0$.

Здесь $e^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ — единичный антисимметричный тензор четвертого ранга.

Определение этого тензора:

$e^{0123}=1$

и перестановка любой пары индексов меняет знак компоненты тензора, например $e^{1023}=-1$. Если хотя бы два индекса равны друг другу, то соответствующая компонента тензора равна нулю.

Эти правила определяют значения всех 256-и компонент тензора $e^{\alpha\beta\gamma\lambda}$.

Рассмотрим другую пару (неоднородных) уравнений Максвелла в вакууме:

$$\begin{cases} div\left(\vec{E}\right)=4\pi\rho \\ rot\left(\vec{B}\right)=\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \qquad (3)$$

Аналогично выводу уравнения (2) из системы (1) можно из системы (3) получить уравнение

$$\partial_\alpha F^{\beta\alpha}=-\frac{4\pi}{c}j^\beta \qquad (4).$$

Например, для этого можно в системе (3) и уравнении (4) подставить выражения для $\vec{E}$, $\vec{B}$ и $F^{\alpha\beta}$ через потенциалы электромагнитного поля и убедиться, что система (3) эквивалентна уравнению (4).

Уравнение (4) — это ковариантная форма уравнений (3).

Здесь нужно помнить, что компоненты $F^{\alpha\beta}$ отличаются от компонент $F_{\alpha\beta}$. Так в пространстве, неискривленном гравитацией

$$F^{\alpha\beta}=g^{\alpha\gamma}g^{\beta\lambda}F_{\gamma\lambda}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Вернемся к динамическим уравнениям для потенциалов в вакууме и в калибровке Лоренца.

Сама калибровка Лоренца

$$div\left(\vec{A}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

может быть записана в ковариантной форме $\partial_\alpha A^\alpha=0$.

В калибровке Лоренца дифференциальные уравнения для потенциалов принимают более простой вид:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \end{cases} \qquad (5).$$

Здесь $\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Даламбера. Его можно выразить в ковариантной форме:

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial(ct)} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial(ct)} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = -\partial_\alpha \partial^\alpha$$

Тогда дифференциальные уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца могут быть записаны в ковариантной форме:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = \frac{4\pi}{c} j^\beta \qquad (6),$$

где $A^\alpha \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ и $j^\alpha \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ — контравариантные 4-х векторы потенциала и плотности тока.

Уравнения в ковариантной форме (2), (4), (6) в отличие от уравнений не в ковариантной форме (1), (3), (5) должны выполняться и в пространстве, искривленном гравитацией.